

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 16 Ιουνίου 2018, 13:30 - 17:00

Να διαβαστούν προσεκτικά οι εκφωνήσεις και να αιτιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

Θέμα 1

1α) (10 μονάδες) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

i) Ποιές από τις στήλες του A αποτελούν βάση του χώρου στηλών του A ;

ii) Να βρεθεί μια βάση του μηδενόχωρου του A .

1β) (10 μονάδες) Θεωρούμε το υποσύνολο $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 2z\}$ του $\mathbb{R}^3$.

i) Να αποδειχθεί ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί βάση του V .

ii) Έστω $V^\perp$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

Απάντηση

1α) Φέρνουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow -\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Μόνο η 1^η και η 3^η στήλη του κλιμακωτού πίνακα περιέχουν οδηγούς. Επομένως, η 1^η και η 3^η στήλη του A αποτελούν βάση του χώρου στηλών του. Υπάρχουν και άλλες σωστές απαντήσεις, δηλαδή άλλοι συνδυασμοί στηλών του A οι οποίοι σχηματίζουν βάση του χώρου στηλών. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε την 1^η και 4^η στήλη ή την 2^η και 3^η στήλη ή την 2^η και 4^η στήλη ή την 3^η και 4^η στήλη.

ii) Για να βρούμε βάση του μηδενόχωρου του A , λύνουμε το σύστημα

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

το οποίο δίνει $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_2 - 3x_4, x_2, -x_4, x_4) = x_2(-2, 1, 0, 0) + x_4(-3, 0, -1, 1)$. Τα διανύσματα $(-2, 1, 0, 0)$ και $(-3, 0, -1, 1)$ είναι προφανώς γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού κανένα από τα δύο δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου), επομένως αποτελούν βάση του μηδενόχωρου του A .

1β)

i) Το V είναι μη κενό, αφού $(0, 0, 0) \in V$. Επίσης αν $u = (x_1, y_1, z_1) \in V$ και $v = (x_2, y_2, z_2) \in V$, τότε έχουμε ότι $x_1 = y_1 = 2z_1$ και $x_2 = y_2 = 2z_2$. Θεωρώντας $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και θέτοντας $w = \lambda u + \mu v$ έχουμε ότι $w = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$. Επειδή προφανώς ισχύει ότι $\lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2 = 2(\lambda z_1 + \mu z_2)$, έπεται ότι $w \in B$. Άρα ο V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Κάθε στοιχείο του V γράφεται ως $(x, y, z) = (2z, 2z, z) = z(2, 2, 1)$, άρα το μονοσύνολο $\{(2, 2, 1)\}$ αποτελεί βάση του V .

ii) Έχουμε $(x, y, z) \in V^\perp$ αν και μόνο αν $(x, y, z) \cdot (2, 2, 1) = 0$ αν και μόνο αν $2x + 2y + z = 0$ αν και μόνο αν $(x, y, z) = (x, y, -2x - 2y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -2)$. Τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, -2)$ και $v_2 = (0, 1, -2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αφού κανένα από τα δύο δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου), επομένως αποτελούν βάση του $V^\perp$. Για να βρούμε ορθοκανονική βάση του $V^\perp$, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = (1, 0, -2), \quad u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 = (0, 1, -2) - \frac{4}{5}(1, 0, -2) = \left(-\frac{4}{5}, 1, -\frac{2}{5}\right). \quad \text{Επειδή } \|u_1\| = \sqrt{5} \text{ και}$$

$$\|u_2\| = \frac{3}{\sqrt{5}}, \text{ έπεται ότι ορθοκανονική βάση του } V^\perp \text{ αποτελούν τα διανύσματα } w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{και } w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}\right).$$

Θέμα 2

2α) (8 μονάδες) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y)$.

i) Να υπολογιστεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα αναπαράστασης της f ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$.

ii) Να βρεθεί βάση του $\text{Ker}(f)$ και να υπολογιστεί η διάσταση του $\text{Im}(f)$.

2β) (12 μονάδες) Έστω a πραγματική σταθερά. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

i) Να βρεθούν όλες οι τιμές του a για τις οποίες ο A είναι αντιστρέψιμος.

ii) Να αποδειχθεί ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος για κάθε τιμή του a .

iii) Αν υποθέσουμε ότι μια ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$, να υπολογιστούν όλες οι ιδιοτιμές του A^{100} .

Απάντηση

2α)

i) Έχουμε $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1)$ και $f(0, 0, 1) = (1, 0)$. Επομένως ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ είναι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Φέρνουμε τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow -r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Τα στοιχεία του $\text{Ker}(f)$ δίνονται από τις λύσεις του συστήματος

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

το οποίο δίνει $(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -2x_3, x_3)$. Αυτό συνεπάγεται ότι μια βάση του $\text{Ker}(f)$ είναι το μονοσύνολο $\{(1, -2, 1)\}$. Επομένως, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.

2β)

i) Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής, παίρνουμε ότι

$$\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = -a. \text{ Επομένως, ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν } a \neq 0.$$

ii) Για κάθε τιμή του a , ο πίνακας A είναι συμμετρικός πίνακας, άρα και διαγωνοποιήσιμος (και μάλιστα ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος).

iii) Αφού το 0 είναι ιδιοτιμή του A , ο A είναι μη αντιστρέψιμος, επομένως $a = 0$. Άρα το χαρακτηριστικό

$$\text{πολυνώνιο του } A \text{ ισούται με } \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}. \text{ Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της}$$

τρίτης γραμμής, παίρνουμε ότι

$$\det(A - \lambda I) = \lambda - \lambda \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda - \lambda(\lambda^2 - \lambda - 1) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1). \text{ Συμπεραίνουμε}$$

ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ και $\lambda = 2$. Επομένως οι ιδιοτιμές του A^{100} είναι $\lambda = 0^{100} = 0$, $\lambda = (-1)^{100} = 1$ και $\lambda = 2^{100}$.

Θέμα 3

3α) (6 μονάδες) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n-1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^3)}{\sqrt{x}}$$

3β) (4 μονάδες) Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(5n+9)}$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} + 3^n}$$

3γ) (6 μονάδες) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστούν τα αθροίσματα):

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{10^n}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n \right)$$

3δ) (4 μονάδες) Να βρεθούν όλες οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2^n n^2} (x-5)^n.$$

Απάντηση

3α)

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{e^3}{1} = e^3.$$

(ii) Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ και η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sin(x^3)$ είναι απολύτως φραγμένη από το 1, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^3)}{\sqrt{x}} = 0$ (φραγμένη επί μηδενική).

3β)

(i) Έχουμε $\frac{1}{(5n+4)(5n+9)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n+4} - \frac{1}{5n+9} \right)$, άρα η σειρά είναι τηλεσκοπική και

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(5n+9)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5n+4} - \frac{1}{5n+9} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+9} \right) = \frac{1}{20}.$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος της γεωμετρικής σειράς, έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} + 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(3+1)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

3γ)

(i) Έστω $a_n = \frac{n^5}{10^n}$. Έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{\frac{10^{n+1}}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{10 n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{10} < 1$, άρα η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{10^n} \text{ συγκλίνει.}$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n)(\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 5}^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 5}{\sqrt{n^2 + 3n + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} = \frac{3}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n)$ αποκλίνει.

$$3\delta) \text{ Έστω } a_n = \frac{n+3}{2^n n^2}. \text{ Έχουμε } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+4}{2^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{n+3}{2^n n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n^2}{2(n+3)(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{n}}{2 \left(1 + \frac{3}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$. Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει στο διάστημα

$(3, 7)$ και αποκλίνει στο $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Απομένει να εξεταστεί η σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος $[3, 7]$. Για $x = 7$, η δυναμοσειρά ισούται με $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2}$. Αφού $\frac{n+3}{n^2} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ και η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, έπεται ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2}$ αποκλίνει (εναλλακτικά, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+3}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$, άρα η

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2}$ αποκλίνει αφού αποκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). Για $x = 3$, η δυναμοσειρά ισούται με $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2}$, η

οποία είναι εναλλάσσουσα σειρά. Έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{n} = 0$. Επίσης, $\frac{n+3}{n^2} \geq \frac{n+4}{(n+1)^2}$ διότι $(n+3)(n+1)^2 = n^3 + 5n^2 + 7n + 3 \geq n^3 + 4n^2 = n^2(n+4)$, για κάθε n . Επομένως, από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2}$ συγκλίνει.

Συνοψίζοντας, η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2^n n^2} (x-5)^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $x \in [3, 7]$.

Θέμα 4

4α) (10 μονάδες) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$. Να υπολογιστούν τα διαστήματα μονοτονίας της f , τα τοπικά ακρότατα της f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της f . Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f στο διάστημα $[-1, 2]$.

4β) (4 μονάδες) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

(i) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

(ii) $\int \cos x \ln(\sin x) dx$

4γ) (2 μονάδες) Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης που δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ στο διάστημα $[0, \ln(7)]$. (**Υπόδειξη:** $1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$.)

4δ) (4 μονάδες) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα (χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα):

(i) $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 5x + 12}{\sqrt{x^8 + 7}} dx$

(ii) $\int_{0+}^1 \frac{\sqrt{x^5 + 2x^6}}{x^3} dx$

Απάντηση

4α) Έχουμε $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2$. Επομένως $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f'(x) \geq 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και αύξουσα στο $[0, +\infty)$, συνεπώς παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο στο σημείο $x = 0$, το οποίο είναι τοπικό ελάχιστο.

Εναλλακτικά, το τριώνυμο $3x^2 - 8x + 6$ έχει θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή και αρνητική διακρίνουσα (ίση με -8). Άρα το τριώνυμο παίρνει μόνο θετικές τιμές. Συνεπώς, $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(x) = 0$ μόνο για $x = 0$, δηλαδή η f λαμβάνει ολικά ελάχιστη τιμή (ίση με 0) μόνο για $x = 0$.

Επίσης $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x-1)(x-1)$. Επομένως, $f''(x) > 0$, για $x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$, και $f''(x) < 0$, για $x \in (\frac{1}{3}, 1)$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{3})$, κοίλη στο διάστημα $(\frac{1}{3}, 1)$ και κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$. Επομένως τα σημεία καμπής της f είναι τα $x = \frac{1}{3}$ και $x = 1$.

Στο διάστημα $(-1, 2)$, τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0$ και $x = 1$. Επειδή $f(-1) = 17$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και $f(2) = 8$, έπεται ότι η f στο διάστημα $[-1, 2]$ έχει μέγιστη τιμή $f(-1) = 17$ και ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$.

4β)

(i) Θέτοντας $u = e^x$, έχουμε $du = e^x dx$, άρα το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int \frac{1}{u^2 + 3u + 2} du = \int \frac{1}{(u+1)(u+2)} du = \int \frac{1}{u+1} du - \int \frac{1}{u+2} du = \ln|u+1| - \ln|u+2| + C = \ln \left| \frac{u+1}{u+2} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{e^x + 1}{e^x + 2} \right| + C = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2} \right) + C,$$

όπου C σταθερά.

(ii) Θέτοντας $u = \sin x$, έχουμε $du = \cos x dx$, άρα το ολοκλήρωμα ισούται με $\int \ln(u) du$. Με παραγοντική ολοκλήρωση, έπεται ότι

$$\int \ln(u) du = u \ln(u) - \int u (\ln u)' du = u \ln u - \int u \frac{1}{u} du = u \ln u - \int 1 du = u \ln u - u + C = \sin x \ln(\sin x) - \sin x + C,$$

όπου C σταθερά.

4γ) Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη, το μήκος της καμπύλης ισούται με το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\ln(7)} \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx = \int_0^{\ln(7)} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx = \int_0^{\ln(7)} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ln(7)} (e^x + e^{-x}) dx = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \Big|_0^{\ln(7)}$$

$$= \left(\frac{e^{\ln(7)} - e^{-\ln(7)}}{2} \right) - \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2} \right) = \frac{7 - \frac{1}{7}}{2} = \frac{24}{7}.$$

4δ)

(i) Για $x \geq 1$, έχουμε $\frac{x^3 + 5x + 12}{\sqrt{x^8 + 7}} \geq \frac{x^3 + 5x + 12}{\sqrt{x^8 + 7x^8}} \geq \frac{x^3}{\sqrt{8x^8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{x}$. Το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει, άρα

αποκλίνει και το $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 5x + 12}{\sqrt{x^8 + 7}} dx$.

Εναλλακτικά, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + 5x + 12}{\sqrt{x^8 + 7}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 5x^2 + 12x}{\sqrt{x^8 + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x^2} + \frac{12}{x^3}}{\sqrt{1 + \frac{7}{x^8}}} = 1$. Αφού το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει,

έπεται ότι αποκλίνει και το $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 5x + 12}{\sqrt{x^8 + 7}} dx$.

(ii) Για $0 < x \leq 1$, έχουμε $x^6 \leq x^5$, άρα $\frac{\sqrt{x^5 + 2x^6}}{x^3} \leq \frac{\sqrt{x^5 + 2x^5}}{x^3} = \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Το ολοκλήρωμα $\int_{0+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

συγκλίνει, άρα συγκλίνει και το $\int_{0+}^1 \frac{\sqrt{x^5 + 2x^6}}{x^3} dx$.

Εναλλακτικά, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sqrt{x^5 + 2x^6}}{x^3}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^6 + 2x^7}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{1 + 2x} = 1$. Αφού το $\int_{0+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει, έπεται ότι

συγκλίνει και το $\int_{0+}^1 \frac{\sqrt{x^5 + 2x^6}}{x^3} dx$.

Θέμα 5

5α) (10 μονάδες) Δίνεται ότι το προσδόκιμο ζωής (σε έτη) των σκύλων Δαλματίας ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 13$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 2$.

i) Ποιό είναι το ποσοστό των σκύλων Δαλματίας που πεθαίνουν πριν συμπληρώσουν τον δέκατο χρόνο ζωής τους;

ii) Τι ηλικία πρέπει να έχει ένας σκύλος Δαλματίας ώστε να είναι μακροβιότερος από το 95% των σκύλων της ράτσας του;

Σημείωση: Για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής Φ της τυπικής κανονικής κατανομής δίνεται ότι $\Phi(1.5) = 0.9332$ και $\Phi(1.645) = 0.95$.

5β) (10 μονάδες) Ο Gill Bates συμμετέχει στην τελική εξέταση της ΠΛΗ12. Η εξέταση έχει πιθανότητα 40% να είναι δύσκολη και 60% να είναι εύκολη. Η πιθανότητα επιτυχίας του Gill Bates σε μια δύσκολη εξέταση είναι 30%, ενώ η πιθανότητα επιτυχίας του σε μια εύκολη εξέταση είναι 90%.

i) Ποιά είναι η πιθανότητα να επιτύχει ο Gill Bates στην εξέταση;

ii) Ποιά είναι η πιθανότητα η εξέταση να ήταν δύσκολη δεδομένου ότι ο Gill Bates απέτυχε σε αυτήν;

Σημείωση: Κάθε ομοιότητα με πρόσωπα ή πράγματα είναι εντελώς συμπτωματική.

Απάντηση

5α)

i) Έστω $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 13}{2}$. Από τη θεωρία, η Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή και

$$P(X < 10) = P\left(\frac{X - 13}{2} < -1.5\right) = P(Z < -1.5) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 6.68\%.$$

ii) Έστω a η ζητούμενη ηλικία. Θέλουμε να ισχύει ότι $P(X \leq a) = 0.95$. Όμως

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X - 13}{2} \leq \frac{a - 13}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{a - 13}{2}\right) = \Phi\left(\frac{a - 13}{2}\right). \text{ Η συνάρτηση } \Phi \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

(διότι, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού, έχουμε $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$), επομένως και 1-1. Άρα,

αφού $\Phi(1.645) = 0.95$, έπεται ότι $\frac{a - 13}{2} = 1.645$, δηλαδή $a = 16.29$.

5β) Έστω $D = \langle \text{η εξέταση είναι δύσκολη} \rangle$ και $S = \langle \text{ο Gill Bates πέτυχε στην εξέταση} \rangle$. Δίνεται ότι $P(D) = 0.4$ (άρα $P(D') = 0.6$), $P(S | D) = 0.3$ και $P(S | D') = 0.9$.

i) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε

$$P(S) = P(S | D)P(D) + P(S | D')P(D') = 0.3 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.6 = 0.66 = 66\%.$$

ii) Από τον κανόνα του Bayes, έχουμε ότι

$$P(D | S') = \frac{P(S' | D)P(D)}{P(S')} = \frac{(1 - P(S | D))P(D)}{1 - P(S)} = \frac{(1 - 0.3)0.4}{1 - 0.66} = \frac{0.28}{0.34} = \frac{14}{17}.$$