

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 17 Ιουνίου 2017, 13:30 - 17:00

Οι απαντήσεις είναι ενδεικτικές. Οποιαδήποτε άλλη σωστή απάντηση είναι αποδεκτή.

Θέμα 1

1α) (8 μονάδες) Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$2x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 2$$

$$3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 18$$

$$x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 3$$

όπου α πραγματική παράμετρος. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss να υπολογιστεί η παράμετρος α ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο και στη συνέχεια να βρεθεί η λύση του συστήματος για την τιμή της παραμέτρου $\alpha = -7$.

1β) (6 μονάδες) Θεωρούμε τα διανύσματα $u = (1, 2, 6)$, $v = (1, 3, -1)$, $w = (1, -1, \alpha)$, όπου α πραγματική παράμετρος. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες τα διανύσματα u, v, w αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και για τις τιμές αυτές της παραμέτρου α να εκφραστεί το διάνυσμα $(2, 18, 3)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων u, v, w .

1γ) (2 μονάδες) Ναδειχτεί ότι το υποσύνολο $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 5\}$ του χώρου $\mathbb{R}^2$ δεν αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

1δ) (4 μονάδες) Ναδειχτεί ότι το υποσύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί μια βάση του.

Απάντηση:

1α) Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα $E = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 12 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 18 \\ 1 & -1 & \alpha & 3 \end{array} \right)$ και με γραμμοπράξεις

καταλήγουμε σε κλιμακωτή μορφή. Έτσι έχουμε:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 12 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 18 \\ 1 & -1 & \alpha & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{2}r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 3r_1 \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 \\ 0 & -3 & \alpha - 6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 \\ 0 & 0 & \alpha - 27 & 17 \end{array} \right).$$

Αν $\alpha = 27$, η τρίτη γραμμή του επαυξημένου πίνακα δείχνει ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Αν $\alpha \neq 27$, η τρίτη γραμμή δίνει $x_3 = 17/(\alpha - 27)$ και με προς τα πίσω αντικατάσταση βλέπουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Άρα η μοναδική τιμή της α για την οποία το σύστημα είναι αδύνατο είναι $\alpha = 27$.

Για $\alpha = -7$, από την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα που βρήκαμε το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 2 \\ 3x_2 - 21x_3 = 15 \\ -34x_3 = 17 \end{cases}. \text{ Έτσι, με προς τα πίσω αντικατάσταση προκύπτει: } \begin{cases} x_3 = -1/2 \\ x_2 = 7x_3 + 5 = 3/2 \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}.$$

Άρα για την τιμή της παραμέτρου $\alpha = -7$ η μοναδική λύση του συστήματος είναι: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

1β) Θεωρούμε τον πίνακα A με στήλες τα διανύσματα u, v, w και τον επαυξημένο πίνακα E :

$$E = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 18 \\ 6 & -1 & \alpha & 3 \end{array} \right). \text{ Φέρνουμε τον πίνακα } E \text{ σε κλιμακωτή μορφή ως εξής:}$$

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 18 \\ 6 & -1 & \alpha & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - 6r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 14 \\ 0 & -7 & \alpha - 6 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + 7r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & \alpha - 27 & 89 \end{array} \right).$$

Από τις 3 πρώτες στήλες του παραπάνω κλιμακωτού πίνακα συμπεραίνουμε ότι μόνο για $\alpha - 27 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 27$ τα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Για να είναι το $(2, 18, 3)$ γραμμικός συνδυασμός των u, v, w θα πρέπει $(2, 18, 3) = x_1 u + x_2 v + x_3 w$ με $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(2, 18, 3) = x_1(1, 2, 6) + x_2(1, 3, -1) + x_3(1, -1, \alpha)$. Οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 18 \\ 6x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 3 \end{cases}. \text{ Από την παραπάνω κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα } E \text{ για } \alpha \neq 27$$

προκύπτουν τα x_1, x_2, x_3 . Συγκεκριμένα, η τρίτη γραμμή του επαυξημένου πίνακα δίνει $x_3 = 89/(\alpha - 27)$ και με προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε ότι $x_2 = 14 + 3x_3 = 14 + 3 \cdot 89/(\alpha - 27) = 14 + 267/(\alpha - 27)$ και $x_1 = -12 - 4x_3 = -12 - 4 \cdot 89/(\alpha - 27) = -12 - 356/(\alpha - 27)$.

1γ) Για $x = y = 0$, έχουμε $2x - y = 5 \neq 0$, άρα το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ δεν ανήκει στο V , άρα το υποσύνολο V δεν αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

1δ) Επειδή ισχύει ότι $(x, y, z) \in W \Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, το υποσύνολο W είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $(2, 1, 0)$ και $(-1, 0, 1)$, δηλαδή, $W = \text{span}\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Άρα ο W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον τα διανύσματα $(2, 1, 0)$ και $(-1, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς από τη σχέση $y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) = (2y - z, y, z)$ έχουμε ότι $y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$ αν και μόνο αν $y = z = 0$. Άρα αποτελούν βάση του W .

Β' Τρόπος 1δ): Το σύνολο W είναι μη κενό διότι περιέχει το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Επίσης, αν $w_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W$ και $w_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $x_1 - 2y_1 + z_1 = 0$ και $x_2 - 2y_2 + z_2 = 0$. Επειδή:

$$\begin{aligned} \lambda w_1 + \mu w_2 &= \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) = \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2) - 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 - 2y_1 + z_1) + \mu(x_2 - 2y_2 + z_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

το $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$ και επομένως το W αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

Θέμα 2

2α) (10 μονάδες) Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1, 0, 0) = (1, -1), \quad f(0, 1, 0) = (0, 1), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 1).$$

- i) (4 μονάδες) Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος της γραμμικής απεικόνισης f .
- ii) (5 μονάδες) Να βρεθούν βάση και διάσταση για τον πυρήνα $\text{Ker } f$ και την εικόνα $\text{Im } f$ της f .
- iii) (1 μονάδα) Να ελεγχθεί αν η f είναι: α) 1-1, β) επί και γ) αντιστρέψιμη.

2β) (10 μονάδες) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^T A P$ να είναι διαγώνιος.

Απάντηση:

2α) i) Έχουμε ότι: $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Αφού η f είναι γραμμική απεικόνιση ισχύει:

$$f(x, y, z) = f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = \\ = x(1, -1) + y(0, 1) + z(-1, 1) = (x - z, -x + y + z).$$

Β' Τρόπος 2α) i): Ο πίνακας A της γραμμικής απεικόνισης θα έχει ως στήλες τα διανύσματα $u_1 = (1, -1)$,

$u_2 = (0, 1)$ και $u_3 = (-1, 1)$. Οπότε έχουμε: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Έτσι, για τον τύπο της γραμμικής απεικόνισης

έχουμε: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$. Οπότε $f(x, y, z) = (x - z, -x + y + z)$.

2α) ii) Για τον πυρήνα $\text{Ker } f$ της γραμμικής απεικόνισης f έχουμε ότι:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - z, -x + y + z) = (0, 0)\} = \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \text{ και } -x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ και } -z + y + z = 0\} = \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ και } y = 0\} = \{z(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Συνεπώς $\text{Ker } f = \text{span}\{(1, 0, 1)\}$ και $\dim \text{Ker } f = 1$. Για την εικόνα $\text{Im } f$ της γραμμικής απεικόνισης f έχουμε

ότι: $f(x, y, z) = x(1, -1) + y(0, 1) + z(-1, 1)$. Συνεπώς τα διανύσματα $\{u_1 = (1, -1), u_2 = (0, 1), u_3 = (-1, 1)\}$

παράγουν την εικόνα $\text{Im } f$, αλλά δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (π.χ. $u_3 = -u_1$). Όμως τα u_1, u_2 είναι

γραμμικώς ανεξάρτητα αφού $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ και συνεπώς αποτελούν μια βάση της $\text{Im } f$. Άρα $\dim \text{Im } f = 2$.

Β' Τρόπος 2α) ii): Βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή (ΑΚΜ) του πίνακα αναπαράστασης ως

προς τις συνήθειες βάσεις: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Άρα $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ και } y = 0\} = \{z(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3\}$. Έτσι, $\text{Ker } f = \text{span}\{(1, 0, 1)\}$ και $\dim \text{Ker } f$

$= 1$. Οδηγά στοιχεία έχουν οι δύο πρώτες στήλες της ΑΚΜ του πίνακα αναπαράστασης, άρα μια βάση της εικόνας $\text{Im } f$ είναι αυτή που αποτελείται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στην 1η και τη 2η στήλη του πίνακα αναπαράστασης. Έτσι, μια βάση της $\text{Im } f$ αποτελεί το σύνολο $\{(1, -1), (0, 1)\}$. Άρα, $\dim \text{Im } f = 2$.

2α) iii) Η f δεν είναι 1-1 γιατί ισχύει ότι $\dim \text{Ker } f = 1$ (διάφορο του μηδενός). Η f είναι επί γιατί ισχύει ότι $\dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Για να είναι αντιστρέψιμη θα έπρεπε να είναι 1-1 και επί. Άρα δεν είναι αντιστρέψιμη.

2β) Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου πίνακα ως συμμετρικός και πραγματικός. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A (π.χ. αναπτύσσοντας την αντίστοιχη ορίζουσα ως προς τη 2η γραμμή):

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι $-1, 1$ και 3 . Για κάθε μία ιδιοτιμή βρίσκουμε βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου.

Για $\lambda = -1$ έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ από το οποίο παίρνουμε $x_1 = x_3$ και $x_2 = 0$.

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = -1$ είναι: $V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Για $\lambda = 1$ έχουμε: $x_1 = x_3 = 0$.

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = 1$ είναι:
$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Για $\lambda = 3$ έχουμε: $x_1 = -x_3$ και $x_2 = 0$.

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = 3$ είναι:
$$V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A είναι διακεκριμένες (όλες διαφορετικές) και επομένως τα τρία βασικά ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Οπότε κανονικοποιούμε το κάθε ιδιοδιάνυσμα και σχηματίζουμε τον παρακάτω ορθογώνιο πίνακα P (ισχύει $PP^T = P^T P = I$):

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ ο οποίος είναι ο ζητούμενος πίνακας διότι ισχύει: } P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Θέμα 3

3α) (4 μονάδες) Να υπολογισθούν τα όρια: **i)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + \cos n}{3n^2 - n}$, **ii)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1}{x^2}$.

3β) (2 μονάδες) Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^4}$.

3γ) (5 μονάδες) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)4^n}$ (να εξεταστεί η σύγκλιση και στα άκρα του διαστήματος).

3δ) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης να δοθεί (επεκτείνοντας κατάλληλα όπου αυτό απαιτείται) η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^{2x^3} - e^{-2x^3}}{2x^2}$ και να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

3ε) (4 μονάδες) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4 = 2x^3 - 30x^2 + x + 2$ έχει το πολύ δύο διακριτές (απλές) πραγματικές ρίζες.

Απάντηση:

3α) i) Έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + \cos n}{2n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\cos n}{n^2}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$, διότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \cos n = 0$

(μηδενική επί τη φραγμένη $\cos n$).

3α) ii) Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1) = e^{3 \cdot 0} - e^{2 \cdot 0} - e^0 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hospital οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9e^{3x} - 4e^{2x} - e^x}{2} = \frac{9 - 4 - 1}{2} = 2. \end{aligned}$$

3β) Ισχύει ότι $0 \leq \frac{e^{-n}}{n^4} < \frac{1}{n^4}$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^4}$ είναι άνω φραγμένη από την p -σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, με $p = 4 > 1$ η οποία συγκλίνει. Συνεπώς, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^4}$ συγκλίνει.

3γ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου και έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{(n+2) 4^{n+1}} \cdot \frac{(n+1) 4^n}{(x+2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} (n+1) 4^n}{(x+2)^n (n+2) 4^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+2)(n+1)}{4(n+2)} \right| = \frac{1}{4} |x+2|.$$

Επομένως για:

- 1) $\frac{1}{4} |x+2| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+2 < 4 \Leftrightarrow -6 < x < 2$ η σειρά συγκλίνει.
- 2) $\frac{1}{4} |x+2| > 1 \Leftrightarrow x < -6$ ή $x > 2$ η σειρά αποκλίνει.
- 3) Αν $x = -6$ η σειρά γίνεται: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(n+1) 4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$, η οποία συγκλίνει καθώς είναι εναλλάσσουσα ακολουθία που έχει γενικό όρο $\frac{1}{n+1}$, η οποία είναι ακολουθία θετικών όρων, φθίνουσα και τείνει στο 0 (κριτήριο Leibniz).
- 4) Αν $x = 2$ η σειρά αποκλίνει αφού καταλήγει στην αρμονική σειρά: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(n+1) 4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Συνεπώς το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1) \cdot 4^n}$ είναι το $[-6, 2)$.

3δ) Θεωρούμε τη σειρά Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, $x \in \mathbb{R}$ οπότε για τη ζητούμενη

συνάρτηση έχουμε ότι:
$$f(x) = \frac{e^{2x^3} - e^{-2x^3}}{2x^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x^3)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x^3)^n}{n!}}{2x^2}.$$

Από την οποία παίρνουμε ότι:
$$f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{3n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{3n}}{n!}}{2x^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n) 2^n x^{3n}}{n!}}{2x^2}.$$

Όμως $1 - (-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 2k \\ 2, & \text{αν } n = 2k+1 \end{cases}$ Έτσι, παίρνουμε ότι:

$$f(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^{2k+1} x^{3(2k+1)}}{(2k+1)!}}{2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} x^{6k+1}}{(2k+1)!} = 2x + \frac{4}{3} x^7 + \frac{4}{15} x^{13} + \dots \text{ Όποτε έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

3ε) Αν η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^3 + 30x^2 - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, τότε η $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 60x - 1 = 0$ θα είχε τουλάχιστον δύο ρίζες δηλαδή μία στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ (Θεώρημα του Rolle) και μία στο $[\rho_2, \rho_3]$. Συνεπώς πάλι από το Θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $f''(x) = 0$ θα είχε τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. Αυτό είναι αδύνατο καθώς $f''(x) = 12x^2 - 12x + 60 = 12(x^2 - x + 5) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού η διακρίνουσα του $x^2 - x + 5$ είναι αρνητική και ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός.

Θέμα 4

4α) (10 μονάδες) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{-x}$ ορισμένη στον $\mathbb{R}$.

i) (5 μονάδες) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι: α) αύξουσα, β) φθίνουσα, γ) στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (κυρτή) και δ) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη).

ii) (2 μονάδες) Να βρεθούν όλα τα σημεία: α) μηδενισμού στους άξονες, β) ακρότατων τιμών (τοπικών, ολικών) και γ) καμπής της f .

iii) (3 μονάδες) Να διερευνηθεί η ύπαρξη ασύμπτωτων ευθειών και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

4β) (5 μονάδες) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κλειστού (φραγμένου) χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 e^{-x}$, $g(x) = 4e^{-x}$, του άξονα yy' και της ευθείας $x = 3$.

4γ) (5 μονάδες) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \ln(2x) dx$ και να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^e x \ln(2x) dx$ συγκλίνει.

Απάντηση:

4α) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο πολυωνυμικής και εκθετικής συνάρτησης και είναι παραγωγίσιμη στον $\mathbb{R}$. Η $1^{\text{η}}$ και $2^{\text{η}}$ παράγωγος ως προς x είναι αντίστοιχα:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x} = x(2 - x) e^{-x},$$

$$f''(x) = (2 - 2x) e^{-x} - (2x - x^2) e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) e^{-x}.$$

4α) i) Επειδή η εκθετική είναι θετική συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ το πρόσημο της $1^{\text{ης}}$ παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2 + 2x$. Έτσι έχουμε $f'(x) > 0$ για $0 < x < 2$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(0, 2)$ και γνήσια φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$. Συνεπώς η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ ίσο με $f(0) = 0$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ ίσο με $f(2) = 4e^{-2} \approx 0.14$. Επίσης το πρόσημο της $2^{\text{ης}}$ παραγώγου είναι το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4x + 2$ που έχει ρίζες τις $2 \pm \sqrt{2}$. Έτσι έχουμε $f''(x) < 0$ για $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$ και $f''(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (κυρτή) στα διαστήματα $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ και $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$ και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο διάστημα $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.

4α) ii) Η αρχή των αξόνων είναι το μοναδικό σημείο όπου το γράφημα της συνάρτησης τέμνει τους δύο άξονες, αφού $x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Τοπικό μέγιστο για $x = 2$ με $f(2) = 4e^{-2}$. Τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = 0$ με $f(0) = 0$. Υπάρχουν δύο σημεία καμπής: για $x = 2 - \sqrt{2}$ με $f(2 - \sqrt{2}) = (6 - 4\sqrt{2})e^{-(2 - \sqrt{2})}$ και $x = 2 + \sqrt{2}$ με $f(2 + \sqrt{2}) = (6 + 4\sqrt{2})e^{-(2 + \sqrt{2})}$.

4α) iii) Επειδή η συνάρτηση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς x δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε την ύπαρξη κατακόρυφης ασύμπτωτης. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} \stackrel{(\infty/0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

η ευθεία $y = 0$ (δηλαδή ο άξονας xx') είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} \stackrel{(\infty/0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x} - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0,$$

άρα ο άξονας xx' είναι οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow +\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$, δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow -\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty$, δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow -\infty$.

Συνδυάζοντας τη συνέχεια και τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$.

4β) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ τέμνονται για $x = -2$ και $x = 2$ καθώς

$$f(x) - g(x) = x^2 e^{-x} - 4e^{-x} = (x + 2)(x - 2)e^{-x} \text{ έχουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι}$$

$$E = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx + \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx =$$

$$= \int_0^2 (4 - x^2) e^{-x} dx + \int_2^3 (x^2 - 4) e^{-x} dx = \int_0^2 (4 - x^2) e^{-x} dx - \int_2^3 (4 - x^2) e^{-x} dx.$$

Το παραπάνω εμβαδόν μπορούμε να το υπολογίσουμε μέσω του ακόλουθου αόριστου ολοκληρώματος, το οποίο υπολογίζεται χρησιμοποιώντας αντικατάσταση και κατά παράγοντες ολοκλήρωση:

$$\int (4 - x^2) e^{-x} dx = -\int (4 - x^2)(e^{-x})' dx = -(4 - x^2)e^{-x} - 2 \int x e^{-x} dx = -(4 - x^2)e^{-x} + 2 \int x(e^{-x})' dx =$$

$$= -(4 - x^2)e^{-x} + 2xe^{-x} - 2 \int e^{-x} dx = -(4 - x^2)e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} = (x^2 + 2x - 2)e^{-x} + c.$$

Έτσι έχουμε:

$$E = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 (4 - x^2) e^{-x} dx - \int_2^3 (x^2 - 4) e^{-x} dx = \left[(x^2 + 2x - 2)e^{-x} \right]_0^2 - \left[(x^2 + 2x - 2)e^{-x} \right]_2^3 =$$

$$= (2^2 + 4 - 2)e^{-2} - (-2)e^0 - (3^2 + 6 - 2)e^{-3} + (2^2 + 4 - 2)e^{-2} = -13e^{-3} + 12e^{-2} + 2.$$

4γ) Χρησιμοποιώντας την κατά παράγοντες ολοκλήρωση έχουμε ότι:

$$\int x \ln(2x) dx = \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln(2x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(2x) - \frac{1}{2} \int x^2 (\ln(2x))' dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(2x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(2x) - \frac{1}{4} x^2 + c$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται μέσω του παραπάνω αόριστου ολοκληρώματος.

$$\int_0^e x \ln(2x) dx = \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^e x \ln(2x) dx = \left[\lim_{k \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} x^2 \ln(2x) - \frac{1}{4} x^2 \right) \right]_k^e =$$

$$= \frac{1}{2} e^2 \ln(2e) - \frac{1}{4} e^2 - \lim_{k \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} k^2 \ln(2k) - \frac{1}{4} k^2 \right) = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \ln 2 - \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow 0^+} k^2 \ln(2k)$$

Χρησιμοποιώντας κανόνα L' Hospital μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο στην παραπάνω σχέση, που είναι

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} k^2 \ln(2k) \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2k)}{\frac{1}{k^2}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{2k}}{-\frac{2}{k^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow 0^+} k^2 = 0.$$

Συνεπώς $\int_0^e x \ln(2x) dx = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \ln 2$, άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Θέμα 5

5α) (10 μονάδες) Σε μια διαγνωστική εξέταση το αποτέλεσμα είναι θετικό με πιθανότητα 0.95 σε έναν ασθενή που πάσχει από την ασθένεια και είναι θετικό με πιθανότητα 0.10 σε ένα υγιές άτομο. Υπολογίζεται ότι 0.5% του πληθυσμού έχει αυτήν την ασθένεια. Για ένα άτομο υπολογίστε τις παρακάτω πιθανότητες:

- i) (2 μονάδες)** Το αποτέλεσμα να είναι θετικό.
- ii) (2 μονάδες)** Αν το αποτέλεσμα είναι θετικό, τότε το άτομο πάσχει πράγματι από την ασθένεια.
- iii) (2 μονάδες)** Αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, τότε το άτομο είναι υγιές.
- iv) (2 μονάδες)** Να έχει δοθεί στον ασθενή λάθος διάγνωση.
- v) (2 μονάδες)** Στους 10 ασθενείς να έχει δοθεί το πολύ μία λάθος διάγνωση.

(Δεν απαιτείται η ολοκλήρωση των αριθμητικών πράξεων)

Απάντηση 5α) :

5α) Έστω $T :=$ το τεστ είναι θετικό και $A :=$ ασθενής. Έτσι έχουμε

$$P(A) = 0.005, \quad P(A') = 0.995, \quad P(T|A) = 0.95, \quad P(T'|A) = 0.05, \quad P(T|A') = 0.1, \quad P(T'|A') = 0.9.$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να πάρουμε διαδοχικά τα εξής:

5α) i) $P(T) = P(T|A) P(A) + P(T|A') P(A') = (0.95 \times 0.005) + (0.1 \times 0.995) = 0.10425.$

$$5\alpha) \text{ ii)} \quad P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T)} = \frac{0.95 \times 0.005}{0.10425} = 0.0456.$$

$$5\alpha) \text{ iii)} \quad P(A'|T') = \frac{P(T'|A')P(A')}{P(T')} = \frac{0.9 \times 0.995}{1 - 0.10425} = 0.9997.$$

$$5\alpha) \text{ iv)} \quad P(T \cap A') + P(T' \cap A) = P(T|A')P(A') + P(T'|A)P(A) = (0.1 \times 0.995) + (0.05 \times 0.005) = 0.09975.$$

5α) ν) Παρατηρούμε ότι:

$$P = P(\text{το πολύ μία λάθος διάγνωση}) = P(\text{καμία λάθος διάγνωση}) + P(\text{μία λάθος διάγνωση}).$$

Έστω X το πλήθος των λανθασμένων διαγνώσεων. Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $X \sim B(n, p)$ με πιθανότητα $p = 0.09975$ και πλήθος επαναλήψεων $n = 10$. Έτσι έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10-0} + \binom{10}{1} p^1 (1-p)^{10-1} = \\ &= (0.09975)^0 (0.90025)^{10} + 10 (0.09975)^1 (0.90025)^9 = 0.737067. \end{aligned}$$

Θέμα 5

5β) (10 μονάδες) Δύο αθλητές Α και Β επιλέχθηκαν από τις χώρες τους να τις εκπροσωπήσουν στους Ολυμπιακούς αγώνες στο αγώνισμα της δισκοβολίας. Η απόσταση που ρίχνει το δίσκο κάθε αθλητής ακολουθεί την κανονική κατανομή. Η μέση απόσταση στην οποία έριχνε το δίσκο ο αθλητής Α την προηγούμενη χρονιά είναι 62 μέτρα με τυπική απόκλιση 1 μέτρο.

i) (3 μονάδες) Την προηγούμενη χρονιά το 84% των βολών του Α ήταν μεγαλύτερες από ω μέτρα. Να βρεθεί η τιμή του ω .

ii) (3 μονάδες) Την προηγούμενη χρονιά το 50% των βολών του αθλητή Β ήταν κάτω από 63 μέτρα, ενώ το 16% των βολών του ήταν πάνω από 66 μέτρα. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των βολών του αθλητή Β.

Υποθέτουμε ότι τη φετινή χρονιά οι αθλητές διατηρούν τις ίδιες επιδόσεις. Σε κάποιο διαγωνισμό στον 1^ο γύρο οι αθλητές ρίχνουν τρεις βολές και πρέπει να έχουν τουλάχιστον μία βολή πάνω από τα 60 μέτρα για να περάσουν στον 2^ο γύρο.

iii) (3 μονάδες) Να προσδιοριστεί ποιος από τους δύο αθλητές είναι πιθανότερο να προκριθεί στον 2^ο γύρο.

iv) (1 μονάδα) Να βρεθεί η πιθανότητα και οι δύο αθλητές να προκριθούν στον 2^ο γύρο.

Υπόδειξη: Προαιρετικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως τιμές της αθροιστικής συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής τις: $\Phi(1) = 0.84$ και $\Phi(2) = 0.975$.

Απάντηση 5β) :

5β) i) Έστω X η επίδοση του αθλητή Α με μέση τιμή $\mu_A = 62m$ και τυπική απόκλιση $\sigma_A = 1m$. Η X ακολουθεί την κανονική κατανομή $X \sim N(62, 1^2)$. Έτσι έχουμε:

$$P(X > \omega) = 0.84 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu_A}{\sigma_A} > \frac{\omega - 62}{1}\right) = 0.84 \Rightarrow P(Z > \omega - 62) = 0.84,$$

και λόγω συμμετρίας $P(Z < 62 - \omega) = 0.84$. Αλλά $\Phi(1) = 0.84$. Οπότε $62 - \omega = 1 \Rightarrow \omega = 61$.

5β) ii) Έστω Y η επίδοση του αθλητή Β, τότε έχουμε:

$$P(Y < 63) = 50\% \Rightarrow \mu_B = 63,$$

$$P(Y > 66) = 16\% \Rightarrow \mu_B + \sigma_B = 66 \Rightarrow \sigma_B = 66 - \mu_B = 66 - 63 = 3.$$

Β' Τρόπος 5β) ii): Έχουμε ότι:

$$P(Y < 63) = 0.5 \Rightarrow P\left(\frac{Y - \mu_B}{\sigma_B} < \frac{63 - \mu_B}{\sigma_B}\right) = 0.5 \Rightarrow P\left(Z < \frac{63 - \mu_B}{\sigma_B}\right) = 0.5.$$

Γνωρίζουμε ότι $P(Z < 0) = \Phi(0) = 0.5$ δεδομένου ότι η κανονική κατανομή είναι συμμετρική γύρω από τη μέση τιμή της και η τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$ έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Άρα $(63 - \mu_B) / \sigma_B = 0 \Rightarrow 63 - \mu_B = 0 \Rightarrow \mu_B = 63$. Ακόμα από την υπόθεση δίνεται:

$$P(Y > 66) = 0.16 \Rightarrow P(Y < 66) = 1 - 0.16 \Rightarrow P\left(\frac{Y - \mu_B}{\sigma_B} < \frac{66 - 63}{\sigma_B}\right) = 0.84 \Rightarrow P\left(Z < \frac{3}{\sigma_B}\right) = 0.84.$$

Επειδή $\Phi(1) = 0.84$ συμπεραίνουμε ότι $3 / \sigma_B = 1 \Rightarrow \sigma_B = 3$.

5β) iii) Έχουμε ότι:

$$P(X > 60) = P\left(\frac{X - \mu_A}{\sigma_A} > \frac{60 - 62}{1}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = \Phi(2) = 0.975,.$$

$$P(Y > 60) = P\left(\frac{Y - \mu_B}{\sigma_B} > \frac{60 - 63}{3}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0.84.$$

Έστω N_A, N_B οι βολές των αθλητών Α, Β (αντίστοιχα) πάνω από τα 60 μέτρα στον 1^ο γύρο. Η N_A ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με πιθανότητα $p = 0.975$, δηλαδή $N_A \sim B(3, 0.975)$ ενώ η N_B με πιθανότητα $p = 0.84$, δηλαδή $N_B \sim B(3, 0.84)$. Έτσι έχουμε ότι:

$$P(\text{ο Α προκρίνεται}) = 1 - P(N_A = 0) = 1 - 0.025^3,$$

$$P(\text{ο Β προκρίνεται}) = 1 - P(N_B = 0) = 1 - 0.16^3.$$

Προφανώς ισχύει ότι $P(\text{ο Α προκρίνεται}) > P(\text{ο Β προκρίνεται})$.

5β) iv) Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα έχουμε ότι:

$$P(\text{προκρίνονται και οι δύο}) = P(\text{ο Α προκρίνεται}) \times P(\text{ο Β προκρίνεται}) = (1 - 0.025^3) \times (1 - 0.16^3).$$