

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑ 6^η

Οι προτεινόμενες λύσεις είναι ενδεικτικές. Οποιαδήποτε άλλη ορθή λύση είναι αποδεκτή.

Ημερομηνία Ανάρτησης:	Δευτέρα	17	Απριλίου 2017
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας:	Κυριακή	14	Μαΐου 2017 ¹
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	17	Μαΐου 2017 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Δευτέρα	22	Μαΐου 2017

Οι ασκήσεις της 6ης εργασίας αναφέρονται στις

Ενότητα 2 (2.1 – 2.5) (Βασική Πιθανοθεωρία)

Ενότητα 3 (3.1, 3.3.1, 4.1, 4.4-4.6) (Τυχαίες μεταβλητές και χαρακτηριστικά των κατανομών τους – Χρήσιμα πρότυπα κατανομών)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Πιθανότητες και Στατιστική Ι**» του κ. Ι. Κουτρουβέλη

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Πιθανότητες Πιθανότητες Ι και Πιθανότητες ΙΙ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- α)** η κατανόηση της έννοιας του δειγματοχώρου και της πιθανότητας καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας ενδεχομένων βάσει προτάσεων από την αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων,
- β)** η κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής και ο υπολογισμός βάσει κατάλληλων συναρτήσεων της πιθανοτικής συμπεριφοράς τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

Διαβάζετε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

Άσκηση 1 (20 μον.)

A) (10 μον.) Ένας πωλητής θέλει να επισκεφθεί τέσσερις πόλεις τις: α , β , γ και δ προκειμένου να πάρει παραγγελίες από τους προμηθευτές της εταιρείας.

- i) (2 μον.) Να δοθεί ο κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω για τη περιγραφή της σειράς επίσκεψης των τεσσάρων πόλεων από τον πωλητή.
- ii) (2 μον.) Να βρεθεί η πιθανότητα ο πωλητής να επισκεφθεί πρώτα τη πόλη α .
- iii) (2 μον.) Να βρεθεί η πιθανότητα ο πωλητής να ξεκινάει από τη πόλη α και να τελειώνει με την πόλη β .
- iv) (2 μον.) Να βρεθεί η πιθανότητα ο πωλητής να επισκέπτεται διαδοχικά της πόλεις β και γ με αυτή τη σειρά.
- v) (2 μον.) Να βρεθεί η πιθανότητα ο πωλητής να επισκέπτεται διαδοχικά της πόλεις α , β και γ με αυτή τη σειρά.

B) (10 μον.) Πρόσφατα θεωρήθηκε από το υπουργείο πολιτισμού ότι σημαντικοί άνθρωποι του πνεύματος, των επιστημών και της τέχνης της αρχαίας Ελλάδος δεν είχαν τιμηθεί αρκετά και ότι καλό θα ήταν να στηθεί σε κεντρικό σημείο της πόλης των Αθηνών η προτομή τους. Ως τέτοιοι θεωρήθηκαν οι ποιητές *ΑΓΑΘΩΝ*, *ΑΡΙΦΡΩΝ*, *ΕΡΜΟΔΟΤΟΣ* και *ΦΙΛΟΚΛΗΣ*, οι φιλόσοφοι *ΑΡΤΕΜΙΔΩΡΟΣ*, *ΙΠΠΟΔΑΜΟΣ*, και *ΚΟΡΙΣΚΟΣ*, οι μαθηματικοί *ΑΡΧΥΤΑΣ* και *ΥΠΑΤΙΑ* και τέλος οι γλύπτες *ΕΥΦΡΑΝΩΡ* και *ΠΟΛΥΓΝΩΤΟΣ*. Να βρεθεί με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να στηθούν οι προτομές:

- i) (1 μον.) Σε ευθεία διάταξη
- ii) (1 μον.) Σε κυκλική διάταξη
- iii) (1 μον.) Σε ευθεία διάταξη με την προτομή της μοναδικής γυναίκας της Υπατίας να είναι πρώτη
- iv) (1 μον.) Σε ευθεία διάταξη με τις προτομές των διαφορετικών ομάδων να είναι διαδοχικές.
- v) (1 μον.) Σε ευθεία διάταξη αν έπρεπε να επιλεγούν μόνο 5 προτομές
- vi) (1 μον.) Σε ευθεία διάταξη αν έπρεπε να επιλεγούν μόνο 5 προτομές με μία από αυτές υποχρεωτικά την προτομή της Υπατίας
- vii) (2 μον.) Σε ευθεία διάταξη αν έπρεπε να επιλεγεί μόνο μια προτομή από κάθε ομάδα
- viii) (2 μον.) Σε ευθεία διάταξη αν έπρεπε να επιλεγούν μόνο οι προτομές των μαθηματικών και των γλυπτών και αυτές να τοποθετηθούν εναλλάξ.

Λύση άσκησης 1

A)

- i) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ακολουθίες της μορφής $p_1 p_2 p_3 p_4$ όπου $p_i, 1 \leq i \leq 4$ συμβολίζει την i κατά σειρά πόλη που επισκέφθηκε ο πωλητής. Συνεπώς έχουμε:

$$\Omega = \{\alpha\beta\gamma\delta, \alpha\beta\delta\gamma, \alpha\gamma\beta\delta, \alpha\gamma\delta\beta, \alpha\delta\beta\gamma, \alpha\delta\gamma\beta, \beta\alpha\gamma\delta, \beta\alpha\delta\gamma, \beta\gamma\alpha\delta, \beta\gamma\delta\alpha, \beta\delta\alpha\gamma, \beta\delta\gamma\alpha, \gamma\alpha\beta\delta, \gamma\alpha\delta\beta, \gamma\beta\alpha\delta, \gamma\beta\delta\alpha, \gamma\delta\alpha\beta, \gamma\delta\beta\alpha, \delta\alpha\beta\gamma, \delta\alpha\gamma\beta, \delta\beta\alpha\gamma, \delta\beta\gamma\alpha, \delta\gamma\alpha\beta, \delta\gamma\beta\alpha\}$$

Το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι $N(\Omega) = 24$ (Number of elements of $\Omega=24$).

- ii) Το ενδεχόμενο: ο πωλητής να επισκεφθεί πρώτα τη πόλη α είναι το σύνολο:

$$A_1 = \{\alpha\beta\gamma\delta, \alpha\beta\delta\gamma, \alpha\gamma\beta\delta, \alpha\gamma\delta\beta, \alpha\delta\beta\gamma, \alpha\delta\gamma\beta\}$$

Το πλήθος των στοιχείων του A_1 είναι 6. Σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(A_1) = \frac{N(A_1)}{N(\Omega)} = \frac{6}{24} \Rightarrow P(A_1) = \frac{1}{4}.$$

- iii) Το ενδεχόμενο: ο πωλητής να ξεκινάει από τη πόλη α και να τελειώνει με την πόλη β είναι το σύνολο:

$$A_2 = \{\alpha\gamma\delta\beta, \alpha\delta\gamma\beta\}$$

Συνεπώς η πιθανότητα είναι: $P(A_2) = \frac{N(A_2)}{N(\Omega)} = \frac{2}{24} \Rightarrow P(A_2) = \frac{1}{12}.$

- iv) Το ενδεχόμενο: ο πωλητής να επισκέπτεται διαδοχικά της πόλεις β και γ με αυτή τη σειρά είναι το σύνολο:

$$A_3 = \{\beta\gamma\alpha\delta, \beta\gamma\delta\alpha, \alpha\beta\gamma\delta, \delta\beta\gamma\alpha, \alpha\delta\beta\gamma, \delta\alpha\beta\gamma\}$$

Συνεπώς η πιθανότητα είναι: $P(A_3) = \frac{N(A_3)}{N(\Omega)} = \frac{6}{24} \Rightarrow P(A_3) = \frac{1}{4}.$

- v) Το ενδεχόμενο: ο πωλητής να επισκέπτεται διαδοχικά της πόλεις α, β και γ με αυτή τη σειρά είναι το σύνολο:

$$A_4 = \{\alpha\beta\gamma\delta, \delta\alpha\beta\gamma\}$$

Συνεπώς η πιθανότητα είναι: $P(A_4) = \frac{N(A_4)}{N(\Omega)} = \frac{2}{24} \Rightarrow P(A_4) = \frac{1}{12}.$

B) Έχουμε 4 ποιητές, 3 φιλοσόφους, 2 μαθηματικούς και 2 γλύπτες. Σύνολο 11 προτομές.

- i) Μεταθέσεις των 11 αντικειμένων = $P_{11}^{11} = 11!$ τρόποι.
ii) Κυκλικές μεταθέσεις των 11 αντικειμένων = $(11-1)! = 10!$ τρόποι.
iii) 1(τοποθέτηση της προτομής της Υπατίας με 1 τρόπο) $\cdot 10!$ (Μεταθέσεις των υπολοίπων) = $10!$ τρόποι.
iv) $4!$ (Μεταθέσεις των ομάδων) $\cdot 4!$ (Μεταθέσεις των ποιητών) $\cdot 3!$ (Μεταθέσεις των φιλοσόφων) $\cdot 2!$ (Μεταθέσεις των μαθηματικών) $\cdot 2!$ (Μεταθέσεις των γλυπτών) = $4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! = 13824$ τρόποι.
v) Διατάξεις των 5 αντικειμένων από τα 11 = $P_5^{11} = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{6!} = 55440$ τρόποι.

vi) Επιλέγουμε με 1 τρόπο την προτομή της Υπατίας, με $\binom{10}{4}$ τρόπους τις υπόλοιπες 4 προτομές και στη συνέχεια τις 5 συνολικά προτομές που επιλέχθηκαν τις μεταθέτουμε με $5!$ τρόπους.

$$\text{Άρα } 1 \cdot \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} \cdot 5! = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot 5! = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4! \cdot 6!} \cdot 4! \cdot 5 = 25200 \text{ τρόποι.}$$

vii) Επιλέγουμε με $\binom{4}{1} = 4$ τρόπους τον ποιητή, με $\binom{3}{1} = 3$ τρόπους τον φιλόσοφο, με $\binom{2}{1} = 2$ τρόπους τον μαθηματικό και με $\binom{2}{1} = 2$ τρόπους τον γλύπτη. Στη συνέχεια διατάσσουμε τις προτομές τους με $4!$ τρόπους. Άρα έχουμε συνολικά $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4! = 1152$ τρόπους.

viii) $2!$ (Επιλογές της πρώτης ομάδας) $\cdot 2!$ (Μεταθέσεις των προτομών των μαθηματικών) $\cdot 2!$ (Μεταθέσεις των προτομών των γλυπτών) $= 8$ τρόποι συνολικά.

Άσκηση 2 (20 μον.)

A) (12 μον.) Μια τράπεζα διαπιστώνει ότι η σχέση μεταξύ δανείων που αθετούνται και του ποσοστού της προκαταβολής δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Προκαταβολή	5%	10%	20%	25%
Αριθμός Δανείων	1260	700	560	280
Πιθανότητα Αθέτησης	0.05	0.03	0.02	0.01

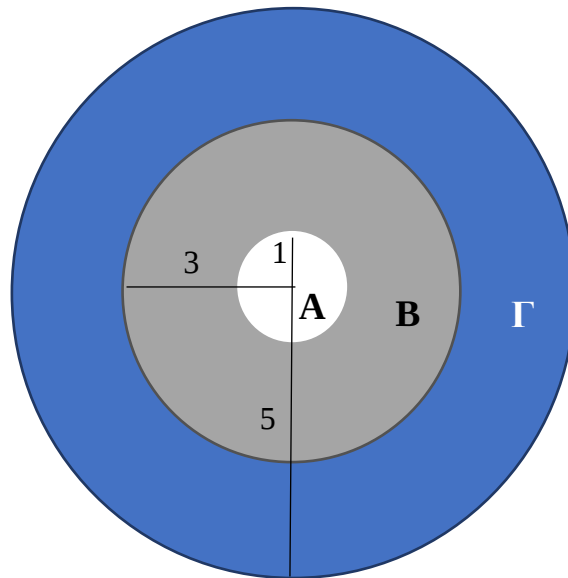
- i) (4 μον.) Ποιά η πιθανότητα να αθετηθεί ένα δάνειο;
ii) (4 μον.) Εάν ένα δάνειο αθετείται ποιά είναι η πιθανότητα ότι η προκαταβολή ήταν 5%;
iii) (4 μον.) Ποιά είναι η πιθανότητα ότι ένα δάνειο που έχει αποπληρωθεί είχε προκαταβολή 10%;

Υπόδειξη: Θεωρείστε τα ενδεχόμενα:

- K = Το δάνειο αθετείται (το επονομαζόμενο κόκκινο δάνειο)
 A = Η προκαταβολή ήταν 5%
 B = Η προκαταβολή ήταν 10%
 C = Η προκαταβολή ήταν 20%
 D = Η προκαταβολή ήταν 25%

Παρουσιάστε τις περιπτώσεις σε ένα δενδροδιάγραμμα. Για το ερώτημα i) χρησιμοποιήστε τον τύπο ολικής πιθανότητας Θεώρημα 2.13 σελ. 41 από το βιβλίο του Ι. Κουτρουβέλη 'Πιθανότητες και Στατιστική Ι' και για τα ερωτήματα ii) και iii) το θεώρημα Bayes Θεώρημα 2.14 σελ. 43 στο ίδιο βιβλίο.

B) (8 μον.) Ένας στόχος αποτελείται από τρεις ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες 1 dm, 3 dm και 5 dm αντιστοίχως όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Μια σκοπεύτρια ρίχνει ένα βέλος προς το στόχο. Έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$ να πετύχει το στόχο. Αν το βέλος πετύχει το στόχο τον πετυχαίνει σε τυχαίο σημείο. Δέκα πόντοι κερδίζονται αν πετύχει τη περιοχή A (κεντρική περιοχή του στόχου), 6 για τη περιοχή B (ενδιάμεση περιοχή) και 3 πόντους αν πετύχει τη περιοχή Γ (εξωτερική περιοχή του στόχου), ενώ δεν κερδίζει πόντους αν δεν πετύχει το στόχο. Να βρείτε τους αναμενόμενους πόντους που η σκοπεύτρια θα κερδίζει κάθε φορά που θα ρίχνει ένα βέλος στο στόχο.

Διευκρίνιση: 1dm (decimeter)=10cm (centimeters), δηλαδή όταν ο στόχος έχει ακτίνα 5dm σημαίνει ότι έχει ακτίνα 50cm (διάμετρο 1m), αλλά συνίσταται να εργαστείτε με dm για απλοποίηση των ενδιάμεσων πράξεων.

Υπόδειξη: Θεωρείστε τα ενδεχόμενα: Σ: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει το στόχο, A: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει την περιοχή A, B: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει την περιοχή B, Γ: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει την περιοχή Γ. Μελετήστε την παράγραφο 3.1.1 σελ 78, ‘Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής’ του βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη.

Λύση άσκησης 2

A)

i) Ο συνολικός αριθμός δανείων είναι 2800. Θεωρούμε το ενδεχόμενο K = το δάνειο αθετείται (το επονομαζόμενο κόκκινο δάνειο) και K' εάν αποπληρώνεται. Θεωρούμε επιπλέον τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A = Η προκαταβολή ήταν 5%

B = Η προκαταβολή ήταν 10%

C = Η προκαταβολή ήταν 20%

D = Η προκαταβολή ήταν 25%

Άρα έχουμε ότι η πιθανότητα η προκαταβολή να ήταν 5% είναι:

$$P(A) = \frac{1260}{2800} = 0.45,$$

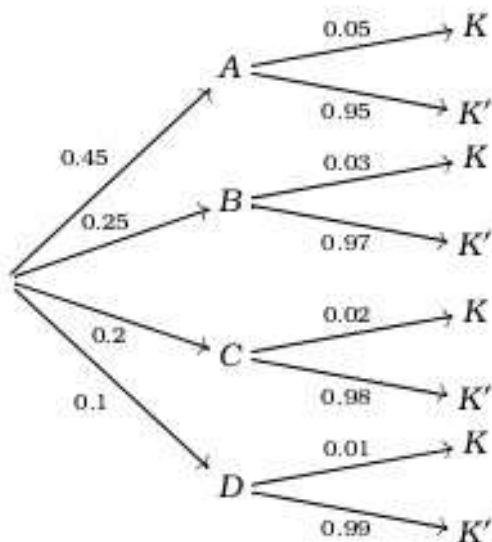
Όμοια:

$$P(B) = \frac{700}{2800} = 0.25,$$

$$P(C) = \frac{560}{2800} = 0.20,$$

$$P(D) = \frac{280}{2800} = 0.10$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε το δενδρο-διάγραμμα:



Για το πρώτο ερώτημα εξετάζουμε όλα τα μονοπάτια που καταλήγουν στο K και από τον τύπο της ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(K) = P(A)P(K|A) + P(B)P(K|B) + P(C)P(K|C) + P(D)P(K|D)$$

Από το διάγραμμα έχουμε

$$P(K) = (0.45)(0.05) + (0.25)(0.03) + (0.20)(0.02) + (0.10)(0.01) = 0.035$$

ii) Για το δεύτερο ερώτημα, πρέπει να υπολογίσουμε το $P(A|K)$. Από τον τύπο του Bayes έχουμε:

$$P(A|K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)} = \frac{P(A)P(K|A)}{P(A)P(K|A) + P(B)P(K|B) + P(C)P(K|C) + P(D)P(K|D)}$$

Από το δένδρο-διάγραμμα έχουμε:

$$P(A|K) = \frac{(0.45)(0.05)}{(0.45)(0.05) + (0.25)(0.03) + (0.20)(0.02) + (0.10)(0.01)} \approx 0.643 \text{ (3 σ. ψ.)}$$

iii) Για το τρίτο ερώτημα πρέπει να υπολογίσουμε το $P(B|K')$. Και πάλι χρησιμοποιούμε τον τύπο του Bayes:

$$P(B|K') = \frac{P(B \cap K')}{P(K')} = \frac{P(B)P(K'|B)}{1 - P(K)}$$

και από το διάγραμμα:

$$P(B|K') = \frac{(0.25)(0.97)}{1 - 0.035} \approx 0.251 \text{ (3 σ. ψ.)}$$

B)

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- Σ: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει το στόχο.
- Α: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει την περιοχή Α.
- Β: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει την περιοχή Β.
- Γ: Η σκοπεύτρια πετυχαίνει την περιοχή Γ.

Υπολογίζουμε το εμβαδό κάθε περιοχής:

$$\text{Εμβαδόν Α} = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$\text{Εμβαδόν Β} = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2 = 8\pi$$

$$\text{Εμβαδόν Γ} = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi$$

$$\text{Ολικό εμβαδό} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Η πιθανότητα να πετύχει η σκοπεύτρια μια περιοχή δεδομένου ότι πέτυχε το στόχο είναι το ποσοστό του εμβαδού της περιοχής σε σχέση με το συνολικό εμβαδό του στόχου. Και σύμφωνα με τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε για την περιοχή Α:

$$P(A) = P(A/\Sigma) \cdot P(\Sigma) = \frac{\pi}{25\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{50}$$

όμοια για την περιοχή Β:

$$P(B) = P(B/\Sigma) \cdot P(\Sigma) = \frac{8\pi}{25\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{50}$$

Και για την περιοχή Γ:

$$P(\Gamma) = P(\Gamma/\Sigma) \cdot P(\Sigma) = \frac{16\pi}{25\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{50}$$

Έστω X οι πόντοι που μάζεψε η σκοπεύτρια. Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X .

x	0	3	6	10
P(X=x)	1/2	16/50	8/50	1/50

Η αναμενόμενη (μέση τιμή) της μεταβλητής X υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{16}{50} + 6 \cdot \frac{8}{50} + 10 \cdot \frac{1}{50} = \frac{48 + 48 + 10}{50} = \frac{106}{50} = 2.12$$

Η σκοπεύτρια κατά μέσο όρο κερδίζει 2.12 πόντους ανά βολή.

Άσκηση 3 (20 μον.)

A) (8 μον.) Ο αριθμός λαθών σε μια οπτική ίνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Ο μέσος αριθμός λαθών στα 50m οπτικής ίνας είναι 1.2.

- i) (3 μον.) Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβούν ακριβώς τρία λάθη σε 150m οπτικής ίνας;
- ii) (3 μον.) Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβούν τουλάχιστον 2 λάθη σε 100m οπτικής ίνας;
- iii) (2 μον.) Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα λάθος στα πρώτα 50m της οπτικής ίνας και ακριβώς ένα λάθος στα επόμενα 50m της οπτικής ίνας;

Υπόδειξη: Στο ερώτημα iii) χρησιμοποιήστε την ιδιότητα ότι η κατανομή Poisson είναι αμνήμων, παράγραφος 4.4 σελ. 116 βιβλίου I. Κουτρουβέλη.

B) (12 μον.) Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Αν είναι γνωστό ότι $P(X < 1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

- i) (4 μον.) Να δειχθεί ότι $\alpha = \frac{1}{2} \ln 2$.
- ii) (4 μον.) Να βρεθεί η διάμεσος της X .
- iii) (4 μον.) Να υπολογισθεί η πιθανότητα του $X < 3$ δεδομένου ότι $X > 1$.

Υπόδειξη: Στο ερώτημα iii) χρησιμοποιήστε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας σελ. 35 στο βιβλίο του I. Κουτρουβέλη.

Λύση άσκησης 3

A)

i) Έστω X ο αριθμός λαθών σε οπτική ίνα μήκους 150m. Ο μέσος αριθμός λαθών στα 150m της οπτικής ίνας είναι 3.6. Άρα έχουμε μια κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 3.6$ δηλαδή $X \sim P_0(3.6)$. Επομένως η πιθανότητα να έχουμε ακριβώς τρία λάθη στα 150m της οπτικής ίνας είναι:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-3.6}(3.6)^3}{3!} = 0.2124692658 \approx 0.212 \text{ (3 σ. ψ.)}$$

ii) Ο μέσος αριθμός λαθών σε οπτική ίνα μήκους 100m είναι 2.4. Έστω Y ο αριθμός λαθών σε οπτική ίνα μήκους 100m, τότε $Y \sim P_0(2.4)$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1)) = 1 - \left(\frac{e^{-2.4}(2.4)^0}{0!} + \frac{e^{-2.4}(2.4)^1}{1!} \right) \\ &= 1 - (0.09071795 + 0.21772309) = 0.69155896 \approx 0.692 \text{ (3 σ. ψ.)} \end{aligned}$$

iii) Έστω Z ο αριθμός των λαθών στα 50m οπτικής ίνας. Γνωρίζουμε ότι $Z \sim P_0(1.2)$ και επομένως:

$$P(Z = 1) = \frac{e^{-1.2}(1.2)^1}{1!} = 0.36143305$$

Καθώς η Z ακολουθεί την κατανομή Poisson, ο αριθμός λαθών στην πρώτη 50m οπτικής ίνας είναι ανεξάρτητος του αριθμού λαθών στα επόμενα 50m οπτικής ίνας. Άρα η πιθανότητα να έχουμε ακριβώς ένα λάθος στα πρώτα 50 m οπτικής ίνας και ακριβώς ένα λάθος στα επόμενα 50 m οπτικής ίνας είναι:

$$(0.36143305) \cdot (0.36143305) = 0.1306338529 \approx 0.131 \text{ (3 σ. ψ.)}$$

B)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

i)

$$P(x < 1) = \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} dx = - \int_0^1 -\alpha e^{-\alpha x} dx = -[e^{-\alpha x}]_0^1 = -e^{-\alpha} + e^0 = 1 - e^{-\alpha}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση: $P(x < 1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Επομένως:

$$P(x < 1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 - e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^{\alpha} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \ln\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\ln 2$$

ii) Έστω m η διάμεσος. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^m \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow -[e^{-\alpha x}]_0^m = \frac{1}{2} \Rightarrow -e^{-\alpha m} + e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\alpha m} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\alpha m} = 2$$

Επομένως και σύμφωνα με την τιμή του α που υπολογίστηκε στο i) ερώτημα έχουμε:

$$\alpha m = \ln 2 \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\alpha} \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} \Rightarrow m = 2$$

iii) Υπολογίζουμε την πιθανότητα:

$$P(x < 3) = \int_0^3 \alpha e^{-\alpha x} dx = -[e^{-\alpha x}]_0^3 = -e^{-3\alpha} + e^0 = 1 - e^{-3\alpha}$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(X < 3/X > 1) &= \frac{P(X < 3 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(1 < X < 3)}{1 - P(X < 1)} = \frac{P(X < 3) - P(X < 1)}{1 - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})} \\ &= \frac{(1 - e^{-3\alpha}) - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - e^{-3\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 - \sqrt{2}e^{-3\alpha} = 1 - \sqrt{2}e^{-3\frac{1}{2}\ln 2} \\ &= 1 - 2^{1/2} \cdot e^{\ln 2 \cdot \frac{-3}{2}} = 1 - 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} = 1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4 (20 μον.)

A) (8 μον.) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} a(b-x)^2, & 0 \leq x \leq b, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι παράμετροι a , b έτσι ώστε η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X με $E(X)=1$.

B) (4 μον.) Η τυχαία μεταβλητή Y είναι τέτοια ώστε $E(2Y + 3) = 6$ και $Var(2 - 3Y) = 11$

Να υπολογισθούν:

- i)** (1 μον.) $E(Y)$
- ii)** (1 μον.) $Var(Y)$
- iii)** (2 μον.) $E(Y^2)$

C) (8 μον.)

i) (4 μον.) Οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές R και S είναι τέτοιες ώστε

$$R \sim N(5, 1) \quad \text{και} \quad S \sim N(8, 2)$$

Η τυχαία μεταβλητή V ορίζεται $V = 3S - 4R$. Υπολογίστε την πιθανότητα: $P(V > 5)$

- ii)** (2 μον.) Οι ανεξάρτητες μεταβλητές U και V ακολουθούν κανονικές κατανομές και είναι τέτοιες ώστε $U \sim N(66, 5)$ και $V \sim N(19, 3)$. Υπολογίστε τη πιθανότητα μία τυχαία επιλεγμένη παρατήρηση της U να είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από τη τυχαία επιλεγμένη παρατήρηση της V .
- iii)** (2 μον.) Έστω X είναι μία τυχαία μεταβλητή. Αναπτύσσοντας την έκφραση $E[(X - E(X))^2]$ (ή αλλιώς) αποδείξτε ότι $E(X^2) \geq (E(X))^2$.

Υπόδειξη: α) Ισχύουν οι σχέσεις,

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c \quad \text{και} \\ Var(aX + bY + c) = a^2Var(X) + b^2Var(Y).$$

β) Για το ερώτημα **Cii)** θεωρείστε μια νέα μεταβλητή $X = U - 3V$.

Λύση άσκησης 4

A)

Αφού η $f : f(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (1)$$

Η συνθήκη $E(X)=1$ ισοδυναμεί με:

$$E(X)=1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = 1 \quad (2)$$

Η σχέση (1) δίνει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} a(b-x)^2 dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^b a(b-x)^2 dx = 1 \Leftrightarrow a \int_0^b \frac{(b-x)^3}{3} dx = 1 \Leftrightarrow \\ -\frac{a}{3} \cdot \left[(b-x)^3 \right]_0^b = 1 \Leftrightarrow -\frac{a}{3} \cdot (0-b^3) = 1 \Leftrightarrow \frac{ab^3}{3} = 1 \Leftrightarrow ab^3 = 3 \quad (3)$$

Η σχέση (2) δίνει:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} xa(b-x)^2 dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^b xa(b-x)^2 dx = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \int_0^b xa(b^2 - 2bx + x^2)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^b (xab^2 - 2abx^2 + x^3a)dx = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \int_0^b xab^2 dx - \int_0^b 2abx^2 dx + \int_0^b x^3 a dx = 1 \Leftrightarrow ab^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b - 2ab \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b + a \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^b = 1 \\
&\Leftrightarrow ab^2 \frac{b^2}{2} - 2ab \frac{b^3}{3} + a \frac{b^4}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{ab^4}{12} = 1 \Leftrightarrow ab^4 = 12 \quad (4)
\end{aligned}$$

Από (3) και (4) έχουμε:

$$\begin{cases} ab^3 = 3 \\ ab^4 = 12 \end{cases} \Rightarrow b = 4 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 4^3 a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{64} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = \frac{3}{64} \end{cases}$$

B) Σύμφωνα και με την υπόδειξη έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad 2E(Y) + 3 &= 6 \Rightarrow E(Y) = \frac{3}{2} \\
\text{ii)} \quad 9\text{Var}(Y) &= 11 \Rightarrow \text{Var}(Y) = \frac{11}{9} \\
\text{iii)} \quad \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \Rightarrow E(Y^2) = \frac{11}{9} + \frac{9}{4} = \frac{125}{36}
\end{aligned}$$

C)

i) Για την τυχαία μεταβλητή $V = 3S - 4R$ η μέση τιμή υπολογίζεται:

$$E(V) = 3 \cdot E(S) - 4 \cdot E(R) = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 5 = 4$$

ενώ η διακύμανσή της είναι:

$$\text{Var}(V) = 3^2 \cdot \text{Var}(S) + 4^2 \cdot \text{Var}(R) = 9 \cdot 2 + 16 \cdot 1 = 34$$

Επομένως η μεταβλητή V ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με:

$$V \sim N(4, \sqrt{34}^2)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
P(V > 5) &= 1 - P(V \leq 5) = 1 - P\left(\frac{V - \mu}{\sigma} \leq \frac{5 - 4}{\sqrt{34}}\right) = 1 - P(Z \leq 0.17) = \\
&= 1 - \Phi(0.1715) = 1 - 0.5675 = 0.4325 \quad (3 \sigma. \psi.)
\end{aligned}$$

ii) Θεωρούμε τη τυχαία μεταβλητή $X = U - 3V$. Οπότε υπολογίζουμε την πιθανότητα: $P(U > 3V) = P(X > 0)$

Για την τυχαία μεταβλητή X έχουμε:

$$\begin{cases} E(X) = 66 - 3 \cdot 19 = 9 \\ \text{Var}(X) = 5 + 9 \cdot 3 = 32 \end{cases} \Rightarrow X \sim N(9, (4\sqrt{2})^2)$$

Άρα σύμφωνα με τους πίνακες της κανονικής κατανομής:

$$P(X > 0) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{0 - 9}{4\sqrt{2}}\right) = P(Z > -1.591) = P(Z < 1.591) = \Phi(1.591) = 0.9441$$

iii)

$$E \left[(X - E(X))^2 \right] = E \left(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2 \right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E \left((E(X))^2 \right) \\ = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Όμως $(X - E(X))^2 \geq 0$ επομένως $E((X - E(X))^2) \geq 0$.

Άρα $E(X^2) - (E(X))^2 \geq 0$ και $E(X^2) \geq (E(X))^2$

Ενναλλακτικά θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι:

$$E(X^2) \geq (E(X))^2 \Leftrightarrow E(X^2) - (E(X))^2 \geq 0 \Leftrightarrow \text{Var}(X) \geq 0 \text{ που ισχύει πάντα.}$$

Αν η τ.μ. X ακολουθεί την **κανονική κατανομή** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής από τον τύπο :

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right)$$

Η μέση τιμή και διασπορά δίνονται από τους τύπους :

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(x) = \sigma^2$$

Άσκηση 5 (20 μον.)

A) (6 μον.) Ο πραγματικός όγκος σούπας σε μια κονσέρβα των 500ml ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500ml και διακύμανση 16ml. Έστω ότι η μεταβλητή X συμβολίζει τον πραγματικό όγκο της σούπας στην κονσέρβα, να βρεθούν τα:

- i) (2 μον.) $P(X > 496)$,
- ii) (2 μον.) $P(X < 498)$,
- iii) (2 μον.) $P(492 < X < 506)$.

B) (7 μον.) Υποθέτουμε ότι ο μέσος όγκος της σούπας στην κονσέρβα δεν είναι γνωστός αλλά ότι η τυπική απόκλιση είναι 4. Εάν απαιτούμε μόνο το 1% των κονσερβών να μπορεί να περιέχει λιγότερο από 495ml, ποιος πρέπει να είναι ο μέσος όγκος της σούπας στην κονσέρβα;

C) (7 μον.) Ένα κιβώτιο περιέχει 10 κονσέρβες σαν και αυτές του ερωτήματος A. Το κιβώτιο επιστρέφεται εάν βρεθούν δύο ή περισσότερες κονσέρβες με βάρος μικρότερο των 496ml. Ποιά η πιθανότητα ότι το κιβώτιο θα επιστραφεί.

Σημείωση: στο τέλος των εκφωνήσεων θα βρείτε πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Λύση άσκησης 5

A)

- i) Για τη μεταβλητή X έχουμε $X \sim N(500, 4^2)$ ενώ η μεταβλητή $Z = \frac{X-500}{4}$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $Z \sim N(0, 1^2)$:

$$P(X > 496) = P\left(Z > \frac{496 - 500}{4}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0.8413$$

- ii) Όμοια,

$$\begin{aligned} P(X < 498) &= P\left(Z < \frac{498 - 500}{4}\right) = P(Z < -0.5) = P(Z > 0.5) = \\ &= 1 - P(Z < 0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085 \end{aligned}$$

- iii) Ανάλογα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(492 < X < 506) &= P\left(\frac{492 - 500}{4} < Z < \frac{506 - 500}{4}\right) = P(-2 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z \leq -2) \\ &= P(Z < 1.5) - P(Z \geq 2) = P(Z < 1.5) - (1 - P(Z \leq 2)) = P(Z < 1.5) + P(Z \leq 2) - 1 \\ &= \Phi(1.5) + \Phi(2) - 1 = 0.9332 + 0.9772 - 1 = 0.9104 \end{aligned}$$

B) Η τιμή του μ είναι τέτοια ώστε:

$$P(X < 495) = 0.01 \Rightarrow P\left(Z < \frac{495 - \mu}{4}\right) = 0.01$$

Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής έχουμε

$$P(Z < 2.33) = 0.99 \Rightarrow P(Z > 2.33) = 0.01 \Rightarrow P(Z < -2.33) = 0.01$$

και έτσι

$$\frac{495 - \mu}{4} = -2.33 \Rightarrow \mu = 495 + 4 \cdot 2.33 = 504.32$$

C) Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι $P(X > 496) = 0.8413$, οπότε $P(X < 496) = 0.1587$. Έστω Y είναι ο αριθμός των κονσερβών σε ένα κιβώτιο που περιέχουν λιγότερο από 496ml. Η πιθανότητα ότι το κιβώτιο θα επιστραφεί είναι $P(Y \geq 2)$.

Το Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας 0.1587, δηλαδή $Y \sim b(10, 0.1587)$.

Επομένως

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1))$$

και αντικαθιστώντας:

$$P(Y \geq 2) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.1587^0 \cdot 0.8413^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.1587^1 \cdot 0.8413^9 = 0.4873$$

Άρα το κιβώτιο επιστρέφεται με πιθανότητα 48.73%.

Αν η τ.μ. X ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή** $X \sim B(n, p)$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

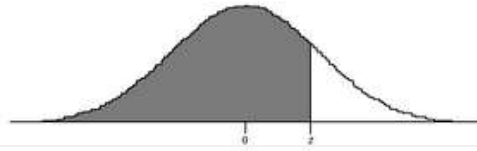
και η μέση τιμή και διασπορά από τους τύπους :

$$E(X) = np, \sigma^2 = np(1-p)$$

Πίνακας Κανονικής Κατανομής

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή (Standardized Normal Distribution Function)

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-t^2/2} dt$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990