

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)  
**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑ 5<sup>η</sup>**

Οι προτεινόμενες λύσεις είναι ενδεικτικές. Οποιαδήποτε άλλη ορθή λύση είναι αποδεκτή.

|                                          |         |                               |
|------------------------------------------|---------|-------------------------------|
| Ημερομηνία Ανάρτησης:                    | Τετάρτη | 15 Μαρτίου 2017               |
| Ημερομηνία παράδοσης εργασίας:           | Κυριακή | 9 Απριλίου 2017               |
| Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:        | Τετάρτη | 12 Απριλίου 2017 <sup>1</sup> |
| Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: | Δευτέρα | 17 Απριλίου 2017              |

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

**Ενότητα 9** (Το ολοκλήρωμα)

**Ενότητα 10** (Γενικευμένη Ολοκλήρωση)

**Ενότητα 11** (Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων)

**Ενότητα 12: 12.1 – 12.4** (Σειρές Fourier)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής και για την εκπόνηση της εργασίας θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο **ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ** στο study.eap.gr ως εξής:

**Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός**

Ολοκληρώματα 1,

Ολοκληρώματα 2,

Σειρές Fourier,

όπως και παλαιότερες γραπτές εργασίες και σημειώσεις των ομαδικών συμβουλευτικών συναντήσεων.

**Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση**

- Η κατανόηση των εννοιών του αόριστου, του ορισμένου και του γενικευμένου ολοκληρώματος.
- Η εκμάθηση των ιδιοτήτων των ανωτέρω εννοιών, των βασικών τεχνικών ολοκλήρωσης και η εφαρμογή τους στα προαναφερθέντα είδη ολοκληρωμάτων.
- Η κατανόηση των εφαρμογών των ολοκληρωμάτων.
- Η κατανόηση του υπολογισμού και της σημασίας των σειρών Fourier.

**Διαβάζετε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.  
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

<sup>1</sup> Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

**Άσκηση 1 (20 μονάδες)**

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα με προαιρετική χρήση των υποδείξεων:

$$(i) \quad I_1 = \int \frac{8x+1}{4x+1} dx \quad (\text{διαίρεση})$$

$$(ii) \quad I_2 = \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx \quad (\text{με αντικατάσταση } u = \cos(x))$$

$$(iii) \quad I_3 = \int \frac{x^3}{\sqrt{3x-1}} dx \quad (\text{με αντικατάσταση } u = \sqrt{3x-1})$$

$$(iv) \quad I_4 = \int \frac{2x^2+x+2}{x(x-1)^2} dx \quad (\text{με διάσπαση σε απλά κλάσματα:}$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x+\rho_1)(x+\rho_2)^2} = \frac{A}{x+\rho_1} + \frac{B}{x+\rho_2} + \frac{C}{(x+\rho_2)^2})$$

$$(v) \quad I_5 = \int x^3 \tan^{-1}(x) dx \quad (\text{με παραγοντική ολοκλήρωση})$$

Υπενθύμιση:  $\tan^{-1}$  συμβολίζει το τόξο εφαπτομένης, δηλαδή την αντίστροφη της συνάρτησης  $y = \tan(x)$  όταν αυτή περιοριστεί στο  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

## &lt; Λύση της 1ης άσκησης &gt;

(i) Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}\}$ . Καθώς στο κλάσμα ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε:

$$\frac{8x+1}{4x+1} = 2 - \frac{1}{4x+1}.$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I_1 = \int \frac{8x+1}{4x+1} dx = \int \left( 2 - \frac{1}{4x+1} \right) dx = \int 2 dx - \int \frac{1}{4x+1} dx = 2 \int dx - \int \frac{1}{4x+1} dx = 2x - \int \frac{1}{4x+1} dx \quad (1.1)$$

Θέτοντας  $u = 4x+1$ , και διαφορίζοντας έχουμε  $du = 4 dx$ , δηλαδή  $dx = \frac{1}{4} du$ .

Οπότε το ολοκλήρωμα στην (1.1) μετά την αντικατάσταση των παραπάνω υπολογίζεται ως εξής:

$$\int \frac{1}{4x+1} dx = \int \frac{1}{u} \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln |u| + c = \frac{1}{4} \ln |4x+1| + c$$

Επομένως,  $I_1 = 2x - \frac{1}{4} \ln |4x+1| + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

(ii) Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο  $\{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$ , δηλαδή, στην ένωση των ανοικτών διαστημάτων  $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$ .

Για  $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$ , θέτοντας  $u = \cos(x)$ , και διαφορίζοντας έχουμε  $du = -\sin(x)dx$ , δηλαδή  $-du = \sin(x)dx$ .

Μετά την αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα έχουμε

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-1}{u^2} du = -\int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{\cos(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Διαφορετικά, επειδή  $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ , εφαρμόζοντας τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος διαπιστώνουμε άμεσα ότι  $I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + c, c \in \mathbb{R}$ .

(iii) Για τιμές του  $x > \frac{1}{3}$  αν θέτουμε  $u = \sqrt{3x-1}$  από όπου γράφουμε ισοδύναμα  $u^2 = 3x-1 \Leftrightarrow \frac{u^2+1}{3} = x$  και διαφορίζοντας έχουμε  $\frac{2u}{3} du = dx$ , δηλαδή  $dx = \frac{2}{3}u du$ .

Μετά την αντικατάσταση των παραπάνω στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{3x-1}} dx = \int \frac{(u^2+1)^3}{3^3 \cdot u} \frac{2}{3} u du = \frac{2}{3^4} \int (u^2+1)^3 du = \frac{2}{3^4} \int (u^6 + 3u^4 + 3u^2 + 1) du = \\ &= \frac{2}{81} \int u^6 du + \frac{2}{27} \int u^4 du + \frac{2}{27} \int u^2 du + \frac{2}{81} \int du = \frac{2}{81} \left( \frac{u^7}{7} + u \right) + \frac{2}{27} \left( \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) + c = \\ &= \frac{2u}{81} \left( \frac{5u^6 + 21u^4 + 35u^2 + 35}{35} \right) + c = \\ &= \frac{2\sqrt{3x-1}}{81} \left( \frac{5(3x-1)^3 + 21(3x-1)^2 + 35(3x-1) + 35}{35} \right) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iv) Η ολοκληρωτέα συνάρτηση ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ .

Επειδή ο παρονομαστής της συνάρτησης έχει βαθμό μεγαλύτερο από αυτόν του αριθμητή και έχει διπλή ρίζα τη μονάδα αναλύουμε σε απλά κλάσματα σύμφωνα με την υπόδειξη (αντικαθιστώντας όπου  $\rho_1 = 0$ , και όπου  $\rho_2 = -1$ , έχουμε:

$$\frac{2x^2 + x + 2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}.$$

Από την ισότητα των κλασμάτων προκύπτει

$$2x^2 + x + 2 = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A,$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των (ίσων) πολυωνύμων προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B+C=1, \text{ το οποίο έχει λύση } A=2, B=0, C=5. \\ A=2 \end{cases}$$

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα δίνεται ως

$$I_4 = \int \frac{2x^2 + x + 2}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{5}{(x-1)^2} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = 2 \ln |x| - \frac{5}{x-1} + c, c \in \mathbb{R}.$$

(v) Υπενθυμίζεται ότι για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύει  $(\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ , οπότε χρησιμοποιώντας την υπόδειξη και την παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$\begin{aligned} I_5 &= \int x^3 \tan^{-1}(x) dx = \int \left( \frac{x^4}{4} \right)' \tan^{-1}(x) dx = \frac{x^4}{4} \tan^{-1}(x) - \int \frac{x^4}{4} (\tan^{-1}(x))' dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \tan^{-1}(x) - \int \frac{x^4}{4(1+x^2)} dx = \frac{x^4}{4} \tan^{-1}(x) - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

καθώς στο κλάσμα ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε:  $\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$ .

Συνεπώς το ολοκλήρωμα στην (1.2) γράφεται:

$$\begin{aligned} I_5 &= \int x^3 \tan^{-1}(x) dx = \frac{x^4}{4} \tan^{-1}(x) - \frac{1}{4} \left( \int \left( x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \right) \\ &= \frac{x^4}{4} \tan^{-1}(x) - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \tan^{-1}(x) + c = \frac{1}{4} (x^4 - 1) \tan^{-1}(x) - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Άσκηση 2 (Μον. 20)**

**A)** (μον. 6) Έστω  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Να βρεθεί μία συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x) \cdot \sin^2(x)}$

γνωρίζοντας ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ .

Στη συνέχεια για τη συνάρτηση  $f$  που προσδιορίστηκε παραπάνω, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x) dx.$$

**B)** (μον. 6) Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^3 \frac{|x|}{|x-1|+1} dx$ .

**Γ)** (μον. 8)

(i) Να εκφράσετε τη συνάρτηση  $f(x) = e^{-x^2}$  σε σειρά MacLaurin και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  ως άθροισμα απείρων όρων δυναμοσειράς. Να επαληθεύσετε ότι η δυναμοσειρά είναι συγκλίνουσα.

(ii) Να προσεγγίσετε την τιμή του ολοκληρώματος με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση όρο-προς-όρο της σειράς MacLaurin.

## &lt; Λύση της 2ης άσκησης &gt;

**A)** Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την ισότητα  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x) \cdot \sin^2(x)}$  προκύπτει

$$f(x) = \int \frac{1}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx$$

Επειδή  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , το αόριστο ολοκλήρωμα της παραπάνω ισότητας γράφεται:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx &= \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \tan(x) - \cot(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για τη συνάρτηση  $f(x) = \int \frac{1}{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)} dx = \tan(x) - \cot(x) + c$  υπάρχει τιμή της σταθεράς

$c$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ , το οποίο ισοδύναμα σημαίνει

$$\text{ότι } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα, για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  η συνάρτηση είναι  $f(x) = \tan(x) - \cot(x) + 1$ .

Το αόριστο ολοκλήρωμα υπολογίζεται

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int (\tan(x) - \cot(x) + 1)dx = \int \tan(x)dx - \int \cot(x)dx + \int 1dx = \\
&= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx - \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx + x + c = \int \frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)}dx - \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)}dx + x + c = \\
&= -\int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{t}dt + x + c = \\
&= -\ln|u| - \ln|t| + x + c = -\ln|\cos(x)| - \ln|\sin(x)| + x + c,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου στο ολοκλήρωμα  $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$  θέσαμε  $u = \cos(x) \Leftrightarrow du = -\sin(x)dx$ , και στο  $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$  θέσαμε  $t = \sin(x) \Leftrightarrow dt = \cos(x)dx$ .

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, στον τύπο (9.45), βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 153) στη (2.1) υπολογίζεται το ζητούμενο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x)dx &= (-\ln|\cos(x)| - \ln|\sin(x)| + x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \\
&= -\ln|\cos(\frac{\pi}{3})| - \ln|\sin(\frac{\pi}{3})| + \frac{\pi}{3} + \ln|\cos(\frac{\pi}{6})| + \ln|\sin(\frac{\pi}{6})| - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

**Β)** Αρχικά απλοποιούμε τις απόλυτες τιμές από την ολοκληρωτέα συνάρτηση χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απόλυτης τιμής (ή τον πίνακα προσήμων, που δίνεται στη συνέχεια) και έχουμε:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

Πίνακας προσήμων:

| $x$     | $-\infty$ | $-1$     | $0$      | $1$   | $3$   | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|----------|-------|-------|-----------|
| $ x $   | $-x$      | $-x$     | $x$      | $x$   | $x$   | $x$       |
| $ x-1 $ | $-(x-1)$  | $-(x-1)$ | $-(x-1)$ | $x-1$ | $x-1$ | $x-1$     |

Η απλοποίηση των απολύτων τιμών στο  $[-1, 3]$  απλοποιεί την ολοκληρωτέα συνάρτηση του ορισμένου ολοκληρώματος και εφαρμόζοντας το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, «Λογισμός μίας Μεταβλητής», Τόμος Α', βιβλίο ΕΑΠ, στον τύπο (9.45), σελ. 153) υπολογίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^3 \frac{|x|}{|x-1|+1} dx &= \int_{-1}^0 \frac{-x}{-(x-1)+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{-(x-1)+1} dx + \int_1^3 \frac{x}{x-1+1} dx = \\
&= \int_{-1}^0 \frac{x}{x-2} dx - \int_0^1 \frac{x}{x-2} dx + \int_1^3 dx = \\
&= \int_{-1}^0 \frac{x-2+2}{x-2} dx - \int_0^1 \frac{x-2+2}{x-2} dx + \int_1^3 dx = \\
&= \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) dx - \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) dx + \int_1^3 dx = \\
&= (x + 2\ln|x-2|) \Big|_{-1}^0 - (x + 2\ln|x-2|) \Big|_0^1 + (x) \Big|_1^3 = \\
&= (0 + 2\ln 2 + 1 - 2\ln 3) - (1 + 2\ln 1 - 0 - 2\ln 2) + (3 - 1) = \\
&= 2 + 4\ln 2 - 2\ln 3.
\end{aligned}$$

**Γ)** Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα MacLaurin της συνάρτησης  $f(x) = e^x$ , (βλέπε «Λογισμός μίας Μεταβλητής», Τόμος Α', βιβλίο ΕΑΠ, στον τύπο (8.34), σελ. 127), για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

και με αντικατάσταση του  $x$  με το  $-x^2$  έχουμε

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \quad (2.2)$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα σειράς χρησιμοποιώντας τη δυναμοσειρά στην (2.2) και ολοκληρώνοντας κάθε όρο της, δηλαδή,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot n!} = \\ &= 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1) \cdot (n-1)!} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Η σειρά στη (2.3),  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ , είναι εναλλάσσουσα με  $a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (n-1)!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Οι όροι της ακολουθίας  $(a_n)$  είναι θετικοί και εξετάζοντας το λόγο των διαδοχικών όρων της διαπιστώνουμε ότι :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2n+1) \cdot n!}}{\frac{1}{(2n-1) \cdot (n-1)!}} = \frac{(2n-1) \cdot (n-1)!}{(2n+1) \cdot n!} = \frac{(2n-1)}{(2n+1) \cdot n} < 1,$$

επειδή  $\frac{(2n-1)}{(2n+1) \cdot n} < 1 \Leftrightarrow 2n^2 - n + 1 > 0$ , ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , (ελέγξτε το πρόσημο του τριωνύμου).

Συνεπώς η ακολουθία  $(a_n)$  είναι γνησίως φθίνουσα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι μηδενική (δηλαδή,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ).

Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει.

Επειδή  $a_6 = \frac{1}{11 \cdot 5!} = 0.0007575\dots$ ,  $a_7 = \frac{1}{13 \cdot 6!} = 0.000106\dots$ ,  $a_8 = \frac{1}{15 \cdot 7!} = 0.0000132275\dots$

χρησιμοποιώντας τους πέντε πρώτους όρους της σειράς έχουμε

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.747486772\dots$$

χρησιμοποιώντας τους έξι όρους της σειράς έχουμε

$$S_6 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} = 0.74672919\dots$$

και χρησιμοποιώντας τους επτά όρους της σειράς έχουμε

$$S_7 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} = 0.746836034\dots$$

βρίσκουμε την τιμή του ολοκληρώματος με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων επιλέγοντας το  $S_6$  αφού η επιρροή οποιουδήποτε επόμενου όρου επιρεάζει από το 4<sup>ο</sup> ψηφίο και πέρα.

Άρα  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.74672919\dots$

### Άσκηση 3 (Μον. 20)

**A)** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να υπολογιστούν, στην περίπτωση που συγκλίνουν, τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$(i) \text{ (μον. 5)} \quad I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$(ii) \text{ (μον. 5)} \quad I_2 = \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

**B)** (μον. 10) Να αποδείξετε, με παραγοντική ολοκλήρωση ότι,  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ , για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ .

Υπενθυμίζεται ότι ισχύει:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ .

#### <Λύση της 3ης άσκησης>

**A)** (i) Επειδή η  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$  είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο  $(-\infty, 0]$ , το  $I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-2)^2} dx$  είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους, (βλέπε, «Λογισμός μίας Μεταβλητής», Τόμος Α', βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 161). Θεωρούμε έναν αρνητικό αριθμό  $k$  και το ολοκλήρωμα  $\int_k^0 \frac{1}{(x-2)^2} dx$  υπολογίζεται

$$\int_k^0 \frac{1}{(x-2)^2} dx = - \int_k^0 \left( \frac{1}{x-2} \right)' dx = - \frac{1}{x-2} \Big|_k^0 = - \frac{1}{0-2} + \frac{1}{k-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k-2} \quad (3.1)$$

Το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα προκύπτει από την (3.1) παίρνοντας το όριο της καθώς  $k \rightarrow -\infty$ ,

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{k \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{k-2} \right) = \frac{1}{2} + \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{k-2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Το 2 είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ , επειδή η  $f$  ορίζεται στο  $\mathbb{R} - \{2\}$  και

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ , επιπλέον η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο  $[0, 2) \cup (2, 3]$ , επομένως

το ζητούμενο  $\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$  είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους.

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο (10.2) (βλέπε, «Λογισμός μίας Μεταβλητής», Τόμος Α', βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 160), έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int_0^{2^-} \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int_{2^+}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x-2} \right) \Big|_0^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x-2} \right) \Big|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $I_2$  δεν συγκλίνει.



**Προσοχή:** Είναι λάθος να υπολογίσουμε  $\int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} + c$  και κατόπιν να θεωρήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα  $\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = -\frac{1}{x-2} \Big|_0^3 = -\frac{1}{3-2} + \frac{1}{0-2} = -\frac{3}{2}$ , παραλείποντας το γεγονός ότι το 2 είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης.

**Β)** Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους. Αρχικά υπολογίζουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας  $n$ -φορές τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned} \int x^n e^{-x} dx &= -\int x^n (e^{-x})' dx = -\left[ x^n e^{-x} - \int (x^n)' e^{-x} dx \right] = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx = \\ &= -x^n e^{-x} - n \int x^{n-1} (e^{-x})' dx = -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} + n(n-1) \int x^{n-2} e^{-x} dx = \\ &= -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} - n(n-1) \int x^{n-2} (e^{-x})' dx = \\ &= -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} - n(n-1)x^{n-2} e^{-x} + n(n-1)(n-2) \int x^{n-3} e^{-x} dx = \dots \\ &= \dots = -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} - n(n-1)x^{n-2} e^{-x} - \dots - n(n-1) \dots 2 \cdot x \cdot e^{-x} + n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \int e^{-x} dx = \\ &= -x^n e^{-x} - nx^{n-1} e^{-x} - n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot x \cdot e^{-x} - \dots - n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot e^{-x} + c = \\ &= -e^{-x} (x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n(n-1) \dots 2 \cdot x + n(n-1) \dots 2 \cdot 1) + c = \\ &= -e^{-x} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} x^i + c \end{aligned}$$

Άρα, θεωρώντας κάποιο θετικό αριθμό  $k$ , το ορισμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται

$$\int_0^k x^n e^{-x} dx = -e^{-x} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} x^i \Big|_0^k = -e^{-k} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} k^i + e^{-0} n! + e^{-x} \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!} x^i \Big|_{x=0} = -e^{-k} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} k^i + n! = n! - \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \frac{k^i}{e^k} \quad (3.2)$$

Οπότε για  $k \rightarrow +\infty$  από την (3.2) έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k x^n e^{-x} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( n! - e^{-k} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} k^i \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( n! - \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \frac{k^i}{e^k} \right) = n! - \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^i}{e^k} \right) \quad (3.3)$$

Όμως  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^k} = 0$  και για  $1 \leq i \leq n$  ισχύει,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^i}{e^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k^i)'}{(e^k)'} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{i \cdot k^{i-1}}{e^k} = \dots \text{μετά από } i\text{-φορές τον κανόνα L' Hospital} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{i!}{e^k} = 0.$$

Επομένως, μετά από αντικατάσταση της παραπάνω οριακής τιμής στην (3.3) έχουμε:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k x^n e^{-x} dx = n!$$

**Άσκηση 4 (Μον. 20)**

**A)** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} - \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ .

(i) (μον. 6) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου πάνω από τον άξονα  $xx'$  και κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  για τις τιμές του  $x$  στο διάστημα  $[4, 6]$ .

(ii) (μον. 4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , του άξονα  $xx'$  και των ευθειών  $x = -2$  και  $x = 0$ .

Υπόδειξη: Να υπολογίσετε πρώτα τη μονοτονία της συνάρτησης και τις ασύμπτωτές της κάνοντας ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμά της.

**B)** (μον. 10) Να υπολογίσετε τον όγκο  $V(a, b)$  ενός βαρελιού που σχηματίζεται περιστρέφοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \ln x$  γύρω από τον άξονα  $xx'$ , από  $x = a > 0$  μέχρι  $x = b > a$ . Να υπολογίσετε το όριο του  $V(a, b)$  καθώς  $a \rightarrow 0^+$ .

## &lt; Λύση της 4ης άσκησης &gt;

**A)** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x + \sqrt{12})(x - \sqrt{12})}{(x^2 - 4)^2}$$

και  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{12}$ .

| $x$             | $-\infty$  | $-\sqrt{12}$ | $-2$       | $0$        | $2$        | $\sqrt{12}$ | $+\infty$  |
|-----------------|------------|--------------|------------|------------|------------|-------------|------------|
| $x^2$           | +          | +            | +          | +          | +          | +           | +          |
| $x + \sqrt{12}$ | -          | +            | +          | +          | +          | +           | +          |
| $x - \sqrt{12}$ | -          | -            | -          | -          | -          | -           | +          |
| $f'(x)$         | +          | -            | -          | -          | -          | -           | +          |
| $f(x)$          | $\nearrow$ | $\searrow$   | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$  | $\nearrow$ |

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων καταλαβαίνουμε ότι στο  $x = -\sqrt{12}$  η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο  $x = \sqrt{12}$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty,$$

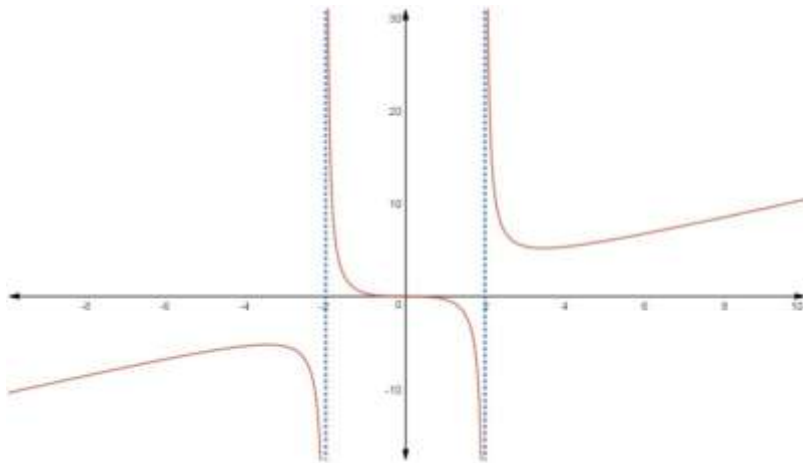
άρα  $x = 2$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της  $f$ .

Όμοια,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad (4.1)$$

άρα  $x = -2$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της  $f$ .

Στο ακόλουθο σχήμα αποτυπώνεται η γραφική παράσταση της  $f$  και οι ασύμπτωτές της.



(i) Στο διάστημα  $[4, 6]$  ισχύει  $x^3 > 0$  και  $x^2 - 4 > 0$ , επομένως  $f(x) > 0$ . Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι το  $I_1 = \int_4^6 f(x) dx = \int_4^6 \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$ .

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα  $I = \int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$ . Καθώς στο κλάσμα ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε:  $\frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$ . Επομένως, το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx = \int \left( x + \frac{4x}{x^2 - 4} \right) dx = \int x dx + 2 \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \int \frac{(x^2 - 4)'}{x^2 - 4} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x^2 - 4| + c \quad (4.2)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, στον τύπο (9.45), βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 153) στην (4.2) υπολογίζεται το ολοκλήρωμα  $I_1$  ως εξής:

$$I_1 = \int_4^6 \frac{x^3}{x^2 - 4} dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x^2 - 4| \right) \Big|_4^6 = \frac{36}{2} + 2 \ln |36 - 4| - \frac{16}{2} - 2 \ln |16 - 4| = 10 + 2 \ln \frac{32}{12} = 10 + 2 \ln \frac{8}{3}$$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι  $I_1 = 10 + 2 \ln \frac{8}{3}$ .

(ii) Στο διάστημα  $(-2, 0]$  ισχύει  $x^3 \leq 0$  και  $x^2 - 4 < 0$ , επομένως  $f(x) \geq 0$ . Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι το  $I_2 = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$ .

Παρατηρήστε ότι το  $-2$  είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ , επειδή η  $f$  ορίζεται στο  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$  και ισχύει η (4.1), επιπλέον η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο  $(-2, 0]$ , επομένως το ζητούμενο  $I_2 = \int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$  είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους.

Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα  $I$  από την (4.2) και τον τύπο (10.2) (βλέπε, «Λογισμός μίας Μεταβλητής», Τόμος Α', βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 160), έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^2 - 4} dx = \int_{-2^+}^0 \frac{x^3}{x^2 - 4} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^0 \frac{x^3}{x^2 - 4} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x^2 - 4| \right) \Big|_{-2+\varepsilon}^0 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( 2 \ln 4 - \frac{(-2+\varepsilon)^2}{2} - 2 \ln |(-2+\varepsilon)^2 - 4| \right) = 2 \ln 4 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{(-2+\varepsilon)^2}{2} + 2 \ln |(-2+\varepsilon)^2 - 4| \right) = +\infty \end{aligned}$$

επομένως, το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει, δηλαδή το εμβαδόν απειρίζεται θετικά.

**B)** Σύμφωνα με τον τύπο (11.3) (βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 176), ο όγκος  $V(a, b)$  ενός βαρελιού, που σχηματίζεται περιστρέφοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \ln x$  γύρω από τον άξονα  $xx'$ , από  $x = a > 0$  μέχρι  $x = b > a$  δίνεται από τον τύπο:

$$V(a, b) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b (\ln x)^2 dx. \quad (4.3)$$

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα  $\int (\ln x)^2 dx$ , εφαρμόζοντας δύο φορές την κατά παράγοντες ολοκλήρωση, ως εξής:

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^2 dx &= \int (x)' (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int x((\ln x)^2)' dx = x(\ln x)^2 - 2 \int x \ln x (\ln x)' dx = \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2 \int (x)' \ln x dx = \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \left( x \ln x - \int x(\ln x)' dx \right) = \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c \end{aligned} \quad (4.4)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.4) και εφαρμόζοντας το θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (βλέπε, στον τύπο (9.45), βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 153) στην (4.3) το ολοκλήρωμα  $V(a, b)$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} V(a, b) &= \pi \int_a^b (\ln x)^2 dx = \pi \left( x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right) \Big|_a^b = \\ &= \pi \left( b(\ln b)^2 - 2b \ln b + 2b \right) - \pi \left( a(\ln a)^2 - 2a \ln a + 2a \right) = \\ &= \pi \left( b \ln b (\ln b - 2) - a \ln a (\ln a - 2) + 2(b - a) \right). \end{aligned}$$

Το όριο του  $V(a, b)$ , καθώς  $a \rightarrow 0^+$ , υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} V(a, b) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \pi \left( b \ln b (\ln b - 2) - a \ln a (\ln a - 2) + 2(b - a) \right) \right) = \\ &= \pi b \ln b (\ln b - 2) + 2\pi \lim_{a \rightarrow 0^+} (b - a) - \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( a \ln a (\ln a - 2) \right) = \\ &= \pi b \ln b (\ln b - 2) + 2\pi b - \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a (\ln a - 2)}{\frac{1}{a}} = \\ &= \pi b \ln b (\ln b - 2) + 2\pi b - \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{a} (\ln a - 2) + \ln a \frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \\ &= \pi b \ln b (\ln b - 2) + 2\pi b - \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2(\ln a - 1)}{-\frac{1}{a}} = \\ &= \pi b \ln b (\ln b - 2) + 2\pi b - 2\pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}} = \pi b \ln b (\ln b - 2) + 2\pi b - 2\pi \lim_{a \rightarrow 0^+} a = \\ &= \pi b \ln b (\ln b - 2) + 2\pi b = \pi b \left( (\ln b)^2 - 2 \ln b + 2 \right) \end{aligned}$$

### Άσκηση 5 (Μον. 20)

Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$  για κάθε  $x \in (-\pi, \pi]$ , την οποία επεκτείνουμε σε όλο το  $\mathbb{R}$  περιοδικά με περίοδο  $2\pi$ . Συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα  $f$  και την περιοδική επέκτασή της.

- (i) (μον. 8) Να υπολογίσετε τη σειρά Fourier  $F(x)$  της  $f$ .
- (ii) Να υπολογίσετε τη σειρά Fourier  $\Phi(x)$  της  $f'$  με δύο τρόπους:
  - (a) (μον. 3) αναπτύσσοντας σε σειρά Fourier την  $f'$ .
  - (b) (μον. 3) παραγωγίζοντας κάθε έναν όρο του αναπτύγματος Fourier της  $f$ . Τι παρατηρείτε;
- (iii) (μον. 3) Για ποιές τιμές του  $x$  η σειρά Fourier  $\Phi(x)$  συγκλίνει και ποιο είναι το άθροισμά της;
- (iv) (μον.3) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier  $\Phi(x)$  στο (iii) και για κατάλληλη τιμή του  $x$ , να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Υπενθύμιση: Μια συνεχής συνάρτηση  $f: (-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , που επεκτείνεται  $2L$ -περιοδικά μπορεί να αναπαρασταθεί από την τριγωνομετρική σειρά (σειρά Fourier της  $f$ )

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

όπου

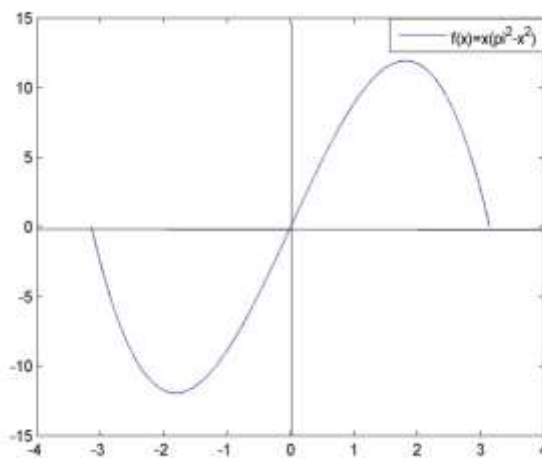
$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

### < Λύση της 5ης άσκησης >

(i) Η σειρά Fourier της  $f$  είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)),$$

όπου  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$  και  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ ,  $\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ , για κάθε  $n = 1, 2, \dots$



Η  $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$ , είναι περιττή στο  $(-\pi, \pi)$ , αφού για κάθε  $x \in (-\pi, \pi)$ , είναι  $-x \in (-\pi, \pi)$  και  $f(-x) = -x[\pi^2 - (-x)^2] = -x(\pi^2 - x^2) = -f(x)$ , βλέπε και στο παραπάνω σχήμα. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο (12.28) (βλέπε, «Λογισμός μίας Μεταβλητής», Τόμος Α', βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 192),  $a_n = 0$ , για κάθε  $n = 0, 1, 2, \dots$

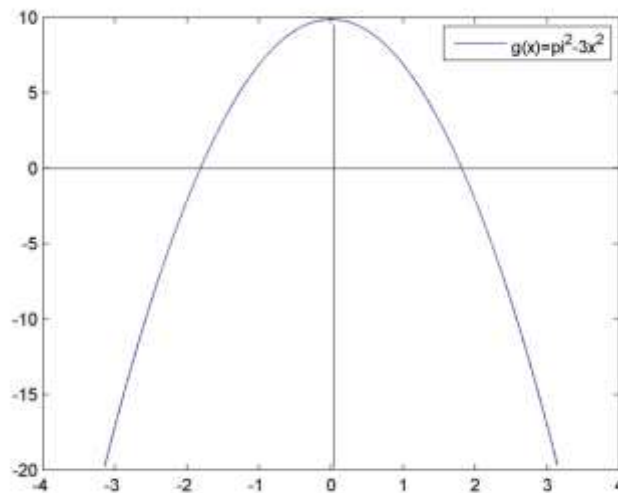
Επειδή, για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , η  $f(x) \cdot \sin(nx)$  είναι άρτια, (ως γινόμενο περιττών συναρτήσεων), έχουμε

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sin(nx) dx = \\
&= 2\pi \left( \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{3x^2}{n^2} - \frac{6}{n^4} \right) \sin(nx) + \left( \frac{6x}{n^3} - \frac{x^3}{n} \right) \cos(nx) \right] \Big|_0^{\pi} = \\
&= -2\pi \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{6\pi}{n^3} - \frac{\pi^3}{n} \right) \cos(n\pi) = \left( \frac{-2\pi^2}{n} - \frac{12}{n^3} + \frac{2\pi^2}{n} \right) (-1)^n = \frac{12}{n^3} (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Άρα, η σειρά Fourier  $F(x)$  της  $f$  είναι η

$$F(x) = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx). \quad (5.1)$$

(ii) (a) Είναι  $f'(x) = \pi^2 - 3x^2 = g(x)$ .



Η  $f'$  είναι άρτια, αφού  $f'(-x) = \pi^2 - 3(-x)^2 = \pi^2 - 3x^2$ , βλέπε και παραπάνω σχήμα.

Άρα για τη σειρά Fourier  $\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n \cos(nx) + \delta_n \sin(nx))$  της  $f'$ , ισχύει  $\delta_n = 0$ , για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , με

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - 3x^2) dx = \pi x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} x^3 \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - \pi^2 = 0$$

και

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - 3x^2) \cos(nx) dx = \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \cos(nx) dx - \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \\
&= \frac{2\pi}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{6}{\pi} \left[ \frac{2x}{n^2} \cos(nx) + \left( \frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3} \right) \sin(nx) \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{12}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{12}{n^2} (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Άρα η σειρά Fourier  $\Phi(x)$  της  $f'$  είναι η

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2} (-1)^{n+1} \cos(nx). \quad (5.2)$$

(b) Επειδή για κάθε όρο της (5.1) έχουμε  $\left[ \frac{12}{n^3} (-1)^{n+1} \sin(nx) \right]' = \frac{12}{n^3} (-1)^{n+1} n \cos(nx) = \frac{12}{n^2} (-1)^{n+1} \cos(nx)$ , παρατηρούμε ότι παραγωγίζοντας κάθε έναν όρο του αναπτύγματος Fourier της  $f$ , παίρνουμε τον αντίστοιχο όρο του αναπτύγματος Fourier της  $f'$ .

(iii) Η  $f'$  είναι συνεχής ως πολωνυμική συνάρτηση, και εξετάζουμε τη συνέχεια στο  $x = \pi$ . Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) = -2\pi^2$  και  $f'(\pi) = -2\pi^2$ . Επομένως η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $x = \pi$ . Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet. Επομένως η σειρά Fourier  $\Phi(x)$  στην (5.2) για κάθε  $x \in [-\pi, \pi]$  συγκλίνει στην  $f'(x)$ , δηλαδή,

$$f'(x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx). \quad (5.3)$$

(iv) Στην (5.3) θέτουμε  $x = \pi$  και έχουμε

$$f'(\pi) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(n \cdot \pi) \Leftrightarrow -2\pi^2 = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (-1)^n \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Στα ερωτήματα i) και ii) χρησιμοποιήσαμε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \int x \cos(nx) dx &= \int x \left( \frac{\sin(nx)}{n} \right)' dx = \frac{x \sin(nx)}{n} - \frac{1}{n} \int x' \sin(nx) dx = \\ &= \frac{x \sin(nx)}{n} - \frac{1}{n} \int \sin(nx) dx = \frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(ax) dx &= \int x \left( -\frac{\cos(ax)}{a} \right)' dx = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{1}{a} \int x' \cos(ax) dx = \\ &= -\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{1}{n} \int \cos(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} + c \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cdot \cos(nx) dx = \int x^2 \left( \frac{\sin(nx)}{n} \right)' dx = x^2 \frac{\sin(nx)}{n} - \int 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx =$$

$$\frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \frac{2}{n} \int x \left( \frac{-\cos(nx)}{n} \right)' dx =$$

$$\frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \frac{2}{n} \left[ x \frac{(-\cos(nx))}{n} - \int \left( \frac{-\cos(nx)}{n} \right) dx \right] = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} + \frac{2}{n} \int \frac{-\cos(nx)}{n} dx =$$

$$\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2}{n^2} \int \cos(nx) dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} + c$$

$$\int x^2 \sin(nx) dx = \int x^2 \left( \frac{-\cos(nx)}{n} \right)' dx = \frac{-x^2 \cdot \cos(nx)}{n} - \int 2x \left( \frac{-\cos(nx)}{n} \right) dx =$$

$$\frac{-x^2 \cdot \cos(nx)}{n} + \frac{2}{n} \int x \cos(nx) dx = \frac{-x^2 \cdot \cos(nx)}{n} + \frac{2}{n} \int x \left( \frac{\sin(nx)}{n} \right)' dx =$$

$$\frac{-x^2 \cos(nx)}{n} + \frac{2}{n} \left[ \frac{x \sin(nx)}{n} - \int \frac{\sin(nx)}{n} dx \right] = \frac{-x^2 \cos(nx)}{n} + \frac{2x \sin(nx)}{n^2} - \frac{2}{n^2} \int \sin(nx) dx =$$

$$\frac{-x^2 \cos(nx)}{n} + \frac{2x \sin(nx)}{n^2} - \frac{2}{n^2} \left( \frac{-\cos(nx)}{n} \right) + c = \frac{-x^2 \cos(nx)}{n} + \frac{2x \sin(nx)}{n^2} + \frac{2 \cos(nx)}{n^3} + c$$

και

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(nx) dx &= \int x^3 \left( -\frac{\cos(nx)}{n} \right)' dx = -\frac{x^3 \cos(nx)}{n} + \frac{1}{n} \int (x^3)' \cos(nx) dx = \\ &= -\frac{x^3 \cos(nx)}{n} + \frac{3}{n} \int x^2 \cos(nx) dx = -\frac{x^3 \cos(nx)}{n} + \frac{3}{n} \left( \frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right) \\ &= \left( \frac{3x^2}{n^2} - \frac{6}{n^4} \right) \sin(nx) + \left( \frac{6x}{n^3} - \frac{x^3}{n} \right) \cos(nx) + c \end{aligned}$$



In[60]:= **f[x\_] := x (Pi<sup>2</sup> - x<sup>2</sup>)**

In[78]:= **a0 =  $\frac{1}{2 \text{Pi}}$  Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}]**

Out[78]= 0

In[90]:= **an = Integrate[ $\frac{1}{\text{Pi}}$  f[x] Cos[ $\frac{\text{Pi} n x}{\text{Pi}}$ ], {x, -Pi, Pi}]**

Out[90]= 0

In[86]:= **bn = Integrate[ $\frac{1}{\text{Pi}}$  f[x] Sin[ $\frac{\text{Pi} n x}{\text{Pi}}$ ], {x, -Pi, Pi}] // FullSimplify**

Out[86]= 
$$-\frac{4 \left( 3 n \pi \cos[n \pi] + (-3 + n^2 \pi^2) \sin[n \pi] \right)}{n^4 \pi}$$

In[87]:= **b[n\_Integer] :=  $-\frac{4 \left( 3 n \pi \cos[n \pi] + (-3 + n^2 \pi^2) \sin[n \pi] \right)}{n^4 \pi}$**

In[93]:= **g[x\_] := Sum[b[n] Sin[n x], {n, 1, 10}]**

In[103]:= **Plot[{f[x], g[x]}, {x, -3 Pi, 3 Pi}, AspectRatio -> 1]**

