

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι προτεινόμενες λύσεις είναι ενδεικτικές. Οποιαδήποτε άλλη ορθή λύση είναι αποδεκτή.

Ημερομηνία Ανάρτησης:	Τετάρτη	08 Φεβρουαρίου 2017
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας:	Κυριακή	12 Μαρτίου 2017
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	15 Μαρτίου 2017 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Δευτέρα	20 Μαρτίου 2017

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να έχουν μελετηθεί τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των συγγραμμάτων και του βοηθητικού υλικού.

Οι ασκήσεις της 4^{ης} εργασίας αναφέρονται στις ενότητες:

Ενότητα 2 (Ακολουθίες – Όρια)

Ενότητα 3 (Σειρές)

Ενότητα 8 (Σειρές Taylor)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι – Τόμος Α' - Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο **ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ** στο study.eap.gr ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό:	- Ακολουθίες, - Σειρές, - Σειρές Taylor.
---------------------------------	--

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι: Η κατανόηση σημαντικών εννοιών στις ακολουθίες και σειρές πραγματικών αριθμών συγκεκριμένα:

- Ακολουθίες: φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες, απειριζόμενες, κριτήρια σύγκλισης, εύρεση ορίων και ασυμπτωτικής συμπεριφοράς.
- Σειρές: ειδικές κατηγορίες, κριτήρια σύγκλισης, άθροισμα και εκτίμηση σφάλματος από μερικά αθροίσματα, φράγματα αθροίσματος σειράς.
- Δυναμοσειρές και σειρές Taylor, μέθοδοι εύρεσης σειρών Taylor και Maclaurin.

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

Άσκηση 1 (μον. 20)

A) (μον. 8) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες με γενικούς όρους:

i) $a_n = \frac{e^{1+3n}}{n^3 - n^2 + n},$

ii) $a_n = 2^{n+1} \sin \frac{\vartheta}{2^n}$ όταν $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$

B) (μον. 12) Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)^n},$

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{(n+a)(n+b)} - n, \quad a, b \in \mathbb{R},$

iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq -1.$

(Υπόδειξη: Στο υποερώτημα **Biii** απαιτείται διερεύνηση αναφορικά με την τιμή του x).

Λύση της 1ης άσκησης

A)

i)

Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{1+3x}}{x^3 - x^2 + x}$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1+3n}}{n^3 - n^2 + n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ οπότε εφαρμόζοντας διαδοχικά τον κανόνα D' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1+3x}}{x^3 - x^2 + x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{1+3x}}{3x^2 - 2x + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9e^{1+3x}}{6x - 2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27e^{1+3x}}{6} = \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1+3x} = +\infty.$$

Οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1+3n}}{n^3 - n^2 + n} = +\infty.$

ii)

Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(x) = 2^{x+1} \sin \frac{\vartheta}{2^x}$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} \sin \frac{\vartheta}{2^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα D' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2^{x+1} \sin \frac{\vartheta}{2^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\vartheta \frac{\sin \frac{\vartheta}{2^x}}{\frac{\vartheta}{2^x}} \right) \stackrel{u = \frac{\vartheta}{2^x}}{=} 2\vartheta \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 2\vartheta \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u}{1} = 2\vartheta.$$

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι 2ϑ .

Εναλλακτική Λύση:

Θέτουμε $g(x) = 2^{x+1}$, $h(x) = \sin \frac{\theta}{2^x}$ και $f(x) = g(x)h(x)$. Τότε, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Επειδή

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}$. Υπολογίζουμε τις

παραγώγους πρώτης τάξης των $h(x)$ και $1/g(x)$:

$$h'(x) = -\frac{\theta}{2^x} \ln 2 \cos \frac{\theta}{2^x} \text{ και } \left(\frac{1}{g(x)}\right)'(x) = -\frac{\ln 2}{2^{x+1}}. \text{ Λόγω του ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} = 2\theta \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{\theta}{2^x} = 2\theta,$$

από τον κανόνα de l'Hospital, έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} = 2\theta$.

B)

i)

Έστω $b_n = \frac{(n+1)!}{(2n)^n}$. Θεωρούμε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ από το οποίο διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+2)!}{(2(n+1))^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{(2n)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! 2^n n^n}{2^{n+1} (n+1)^{n+1} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)n^n}{2(n+1)(n+1)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)}{2(n+1)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2e} < 1. \end{aligned}$$

Οπότε $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ii)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{(n+a)(n+b)} - n &\stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(n+a)(n+b)}^2 - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a+b)n + ab}{\sqrt{n^2 + (a+b)n + ab} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left((a+b) + \frac{ab}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a+b + \frac{ab}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1} = \frac{a+b}{\sqrt{1} + 1} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

iii)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Για $x=1 \Rightarrow \frac{x^n-1}{x^n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n-1}{x^n+1} = 0$.

β) Για $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n-1}{x^n+1} = -1$.

γ) Για $|x| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n-1}{x^n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = 1$.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

A) (μον. 4) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{4n} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16n}\right)^{2n}$.

B) (μον. 4) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_n = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda^{2n+1}}{4 \cdot 3^{2n} + 5 \cdot \lambda^{2n}}$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ) (μον. 6) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

i)
$$a_n = (-1)^n + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1},$$

ii)
$$b_n = \frac{d^n}{n}, \text{ με } |d| \leq 1.$$

Δ) (μον. 6) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο των ακολουθιών:

i)
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}},$$

ii)
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}.$$

Λύση της 2ης άσκησης

A)

$$\begin{aligned} a_n &= \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{4n} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16n}\right)^{2n} = \left(2 \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)^{4n} \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\right)^{2n} = 2^{4n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n} 4^{-2n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n} = \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^2 \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{1/2} \rightarrow e^2 \cdot e^{1/2} = e^{5/2}. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right]^{1/2} = e^2 e^{1/2} = e^{5/2}$$

B)

$$\alpha_n = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda^{2n+1}}{4 \cdot 3^{2n} + 5 \cdot \lambda^{2n}} = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot \lambda^{2n}}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot \lambda^{2n}}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Για $|\lambda| = 3 \Rightarrow \alpha_n = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot \lambda^{2n}}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot \lambda^{2n}} = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot (\lambda^2)^n}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot (\lambda^2)^n} = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot 9^n}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot 9^n} = \frac{2 + \lambda}{9}.$

β) Για $|\lambda| > 3$ έχουμε $\lambda^2 > 9$ οπότε:

$$\alpha_n = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot \lambda^{2n}}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot \lambda^{2n}} = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot (\lambda^2)^n}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot (\lambda^2)^n} = \frac{2 \cdot \left(\frac{9}{\lambda^2}\right)^n + \lambda}{4 \cdot \left(\frac{9}{\lambda^2}\right)^n + 5} \rightarrow \frac{\lambda}{5} \text{ αφού } \left(\frac{9}{\lambda^2}\right)^n \rightarrow 0.$$

γ) Για $|\lambda| < 3$ έχουμε $\lambda^2 < 9$ οπότε:

$$\alpha_n = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot \lambda^{2n}}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot \lambda^{2n}} = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda \cdot (\lambda^2)^n}{4 \cdot 9^n + 5 \cdot (\lambda^2)^n} = \frac{2 + \lambda \cdot \left(\frac{\lambda^2}{9}\right)^n}{4 + 5 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{9}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ αφού } \left(\frac{\lambda^2}{9}\right)^n \rightarrow 0$$

Γ)

i)

Η ακολουθία $\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1} \rightarrow 0$ ως γινόμενο της μηδενικής $\frac{1}{n+1}$ επί της φραγμένης $-1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$.

Έτσι, επειδή $a_{2k} \rightarrow 1$ και $a_{2k+1} \rightarrow -1$ είναι δύο υποακολουθίες της δοθείσας ακολουθίας a_n που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα ακολουθία a_n δεν συγκλίνει.

ii)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Για $d = 1 \Rightarrow b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

β) Για $d = -1 \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ η ακολουθία είναι μηδενική ως γινόμενο της μηδενικής ακολουθίας $\frac{1}{n}$ επί της παρακάτω φραγμένης

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n \text{ περιττός} \\ 1, & n \text{ άρτιος} \end{cases}, \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

γ) Για $|d| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d^n = 0 \Rightarrow b_n = d^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ως γινόμενο δύο μηδενικών ακολουθιών.

Δ)

i)

Προφανώς ισχύει ότι $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + \kappa}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ για κάθε $\kappa: n \leq \kappa \leq 2n$. Οπότε

προσθέτοντας κατά μέλη όλες τις ανισότητες για κάθε $\kappa: n \leq \kappa \leq 2n$ έχουμε

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq a_n \leq \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

$$\text{Όμως επειδή } \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1 \text{ και } \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 2n}} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \rightarrow 1$$

Συμπεραίνουμε σύμφωνα με το θεώρημα ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

ii)

Προφανώς ισχύει $\frac{1}{\sqrt{n+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+\kappa}}$ για κάθε $\kappa: 1 \leq \kappa \leq n$. Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη όλες τις ανισότητες για κάθε $\kappa: 1 \leq \kappa \leq n$ έχουμε

$$b_n \geq \frac{n}{\sqrt{n+n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \rightarrow \infty \text{ άρα και η } b_n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3 (μον. 20)

A) (μον. 8) Δείξτε ότι ορίζεται ακολουθία x_n που πληροί τον αναδρομικό τύπο:

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ με } 0 < x_0 < 1,$$

και εξετάστε την σύγκλισή της σε πραγματικό αριθμό.

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι η ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη.)

B) (μον. 12) Η ακολουθία των αριθμών Fibonacci ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ για $k = 1, 2, \dots$, όπου $F_0 = 0$ και $F_1 = 1$. Δείξτε ότι ο γενικός όρος της ακολουθίας ισούται με $F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$ όπου $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (γνωστή και ως χρυσή τομή) η

θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης Fibonacci $x^2 - x - 1 = 0$.

(Υπόδειξη: Ο παραπάνω αναδρομικός τύπος ισοδυναμεί με $\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$, για $k = 1, 2, \dots$,

και κατά επέκταση με $\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ για κατάλληλο πίνακα A που θα προσδιορίσετε. Βρείτε την k -οστή δύναμη του πίνακα A .)

Λύση της 3ης άσκησης

A) Το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα Δ (διότι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$)

οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες και το πρόσημο του είναι ομόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου που είναι $1 > 0$. Επομένως η δοθείσα ακολουθία ορίζεται καλώς και προφανώς ισχύει ότι $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επίσης η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το 1 διότι επαγωγικά έχουμε:

Για $n = 0$, $x_0 < 1$.

Δεχόμαστε ότι $x_n < 1$ οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_n < 1 &\Leftrightarrow x_n - 1 < 0 \stackrel{x_n > 0}{\Leftrightarrow} x_n(x_n - 1) < 0 \Leftrightarrow x_n^2 - x_n < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < x_n^2 - x_n + 1 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_n^2 - x_n + 1} < 1 \Leftrightarrow x_{n+1} < 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $0 < x_n < 1$.

Για να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι επίσης αύξουσα μπορούμε να εξετάσουμε το πρόσημο του

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \sqrt{x_n^2 - x_n + 1}^2 - x_n^2 = x_n^2 - x_n + 1 - x_n^2 = 1 - x_n > 0 \Rightarrow$$

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 > 0 \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) > 0 \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n) > 0 \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n \text{ (μιας και } x_{n+1}, x_n > 0)$$

οπότε η ακολουθία είναι αύξουσα.

Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα ως αύξουσα και φραγμένη εκ των άνω και έχει όριο τη θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^2 \Leftrightarrow -x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Β) Παρατηρούμε ότι ισχύει $\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ έχει το παρακάτω χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

το οποίο έχει τις ρίζες $\lambda_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = -\varphi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ αφού ισχύει ότι:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 1-\varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = \varphi x_2 \text{ επομένως δίνονται ως συνάρτηση του } \varphi \text{ και έχουν τη μορφή } \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = (-\varphi)^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ βρίσκονται από τη λύση του

$$\begin{pmatrix} 1-(-\varphi)^{-1} & 1 \\ 1 & -(-\varphi)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+\varphi^{-1} & 1 \\ 1 & \varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -\varphi^{-1} x_2$$

δηλαδή έχει την μορφή $\begin{pmatrix} -\varphi^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας διαγωνοποιείται και ισχύει ότι:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi^{-1} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}.$$

Από όπου έχουμε:

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^k & 0 \\ 0 & (-\varphi)^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi^{-1} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^k & \varphi^{k-1} \\ -(-\varphi)^{-k} & (-\varphi)^{-k} \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \begin{pmatrix} \varphi^{k+1} - (-\varphi)^{-k-1} & \varphi^k - (-\varphi)^{-k} \\ \varphi^k - (-\varphi)^{-k} & \varphi^{k-1} + (-\varphi)^{-k} \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \begin{pmatrix} \varphi^{k+1} - (-\varphi)^{-k-1} & \varphi^k - (-\varphi)^{-k} \\ \varphi^k - (-\varphi)^{-k} & \varphi^{k-1} + (-\varphi)^{-k} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \begin{pmatrix} \varphi^{k+1} - (-\varphi)^{-k-1} \\ \varphi^k - (-\varphi)^{-k} \end{pmatrix}$$

Οπότε ισχύει ότι $F_{k+1} = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} (\varphi^{k+1} - (-\varphi)^{-k-1}),$

και ισοδύναμα ισχύει ότι $F_n = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}) = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$

Άσκηση 4 (μον. 20)**A)** (μον. 12) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^3}}$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n^2+1)(n+1)!}$

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2}$

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{3n^2-1}$

B) (μον. 8) Προσδιορίστε τις τιμές της πραγματικής μεταβλητής x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^{2n+1}}{(5n-1) \cdot 25^n}.$$

Λύση της 4ης άσκησης**A)**i) Ο γενικός όρος της σειράς είναι $\alpha_n = \frac{3^n}{2^{n^3}} > 0$, οπότε εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^{n^2}} = 0 < 1.$$

Επομένως, η σειρά συγκλίνει.

ii) Ο γενικός όρος της σειράς έχει τη μορφή: $a_n = \frac{(3n)!}{(n^2+1)(n+1)!} > 0$.

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Λόγου:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(3(n+1))!}{((n+1)^2+1)(n+1+1)!}}{\frac{(3n)!}{(n^2+1)(n+1)!}} = \frac{\frac{(3n+3)!}{(n^2+2n+2)(n+2)!}}{\frac{(3n)!}{(n^2+1)(n+1)!}} = \frac{(3n+3)!(n^2+1)(n+1)!}{(n^2+2n+2)(n+2)!(3n)!} = \\ &= \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n^2+1)(n+1)!}{(n^2+2n+2)(n+1)!(n+2)(3n)!} = \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n+2)}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ρητή ακολουθία με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο από τον βαθμό του παρονομαστή και επομένως

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

iii) Πρόκειται για εναλλάσσουσα σειρά με γενικό όρο:

$\beta_n = (-1)^n a_n$, όπου η ακολουθία $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$ είναι:

- Θετική για κάθε n φυσικό.

- Φθίνουσα, αφού:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+1}{(n+1)^2} - \frac{2n-1}{n^2} = \frac{n^2(2n+1) - (n+1)^2(2n-1)}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{2n^3 + n^2 - (n^2 + 2n + 1)(2n-1)}{n^2(n^2 + 2n + 1)} = \frac{2n^3 + n^2 - 2n^3 + n^2 - 4n^2 + 2n - 2n + 1}{n^4 + 2n^3 + n^2} = \\ &= \frac{-2n^2 + 1}{n^4 + 2n^3 + n^2} < 0. \end{aligned}$$

- Μηδενική:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 0 - 0 = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο Leibnitz για τις εναλλάσσουσες σειρές, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2} \text{ συγκλίνει.}$$

iv) Η σειρά είναι τηλεσκοπική αφού μπορεί να αναλυθεί στη μορφή:

$$\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4(n+1)-1} \right).$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{1}{4n+3} \right) = -\frac{1}{4}.$$

v) Η σειρά έχει όμοια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση με την αρμονική σειρά αφού:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+2}}{3n^2-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{n^2+2}}{3n^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{n^2\left(3-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{3n^2-1}$ αποκλίνει.

B) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2x-1)^{2n+3}}{(5n+4) \cdot 25^{n+1}} \cdot \frac{(2x-1)^{2n+1}}{(5n-1) \cdot 25^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2x-1)^{2n+3} (5n-1) \cdot 25^n}{(5n+4) \cdot 25^{n+1} (2x-1)^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2x-1)^2 (5n-1)}{(5n+4) \cdot 25} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2x-1)^2 \left(5 - \frac{1}{n}\right)}{\left(5 + \frac{4}{n}\right) \cdot 25} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2x-1)^2 (5-0)}{(5+0) \cdot 25} \right| = \frac{1}{25} (2x-1)^2. \end{aligned}$$

Επομένως για τις περιπτώσεις:

$$- \frac{1}{25} (2x-1)^2 < 1 \Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 3,$$

η σειρά συγκλίνει.

$$- \frac{1}{25} (2x-1)^2 > 1 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 3,$$

η σειρά αποκλίνει.

- Αν $x = -2$ η σειρά διαδοχικά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^{2n+1}}{(5n-1) \cdot 25^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-5^{2n+1}}{(5n-1) \cdot 5^{2n}} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(5n-1)},$$

η οποία αποκλίνει έχοντας όμοια συμπεριφορά με την αρμονική σειρά, αφού

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{(5n-1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{5n-1} = 1$$

- Αν $x = 3$ η σειρά αποκλίνει για τον ίδιο λόγο αφού μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{2n+1}}{(5n-1) \cdot 25^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(5n-1)}.$$

Άσκηση 5 (μον. 20)

A) Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Taylor της εκθετικής συνάρτησης και του συνημίτονου να δώσετε, επεκτείνοντας κατάλληλα όπου απαιτείται, αναπτύγματα Maclaurin των παρακάτω συναρτήσεων και να υπολογίσετε τα όρια τους όταν $x \rightarrow 0$:

i) (μον. 4) $f(x) = \frac{e^{-3x^2} - e^{3x^2}}{x},$

ii) (μον. 4) $g(x) = \frac{\cos(4x) - 1 + 8x^2}{x^4}.$

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2 + x}{-x^3 + 3x^2 + x - 3}, \quad |x| < 1.$

i) (μον. 4) Αναλύστε τη συνάρτηση $f(x)$ σε απλά κλάσματα.

ii) (μον. 8) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1,$

αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x)$ σε σειρά Taylor κέντρου 0.

Λύση της 5ης άσκησης**A)**

i) Γνωρίζουμε ότι:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-3x^2} - e^{3x^2}}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x^2)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!}}{x} = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n!}}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1) 3^n x^{2n}}{n!}}{x}. \end{aligned}$$

Όμως επειδή $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 2k \\ -2, & \text{αν } n = 2k+1 \end{cases}$ όλοι οι άρτιοι όροι της σειρά μηδενίζονται και για τους εναπομείναντες περιττούς έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{2k+1} x^{4k+2}}{(2k+1)!}}{x} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{2k+1} x^{4k+1}}{(2k+1)!} = -6x - 9x^5 - \frac{3^4 x^9}{20} + \dots$$

και επομένως έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$

ii) Γνωρίζουμε ότι:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\cos(4x) - 1 + 8x^2}{x^4} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} - 1 + 8x^2}{x^4} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}}{x^4} = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{4^{2(n+2)} x^{2n+4}}{(2n+4)!}}{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{16^{(n+2)} x^{2n}}{(2n+4)!} = \frac{32}{3} - \frac{16^3}{6!} x^2 + \dots \end{aligned}$$

και επομένως έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{32}{3}$.

B)

i) Αναλύουμε την $f(x)$ σε απλά κλάσματα:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x}{-x^3 + 3x^2 + x - 3} = \frac{3x^2 + x}{x^2(3-x) - (3-x)} = \frac{3x^2 + x}{(3-x)(x^2 - 1)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1}.$$

Θα πρέπει τότε:

$$3x^2 + x = A(x^2 - 1) + B(3-x)(x+1) + \Gamma(3-x)(x-1).$$

Δίνοντας κατάλληλες τιμές παίρνουμε:

Για $x=1$ έχουμε $4 = 4B$ οπότε $B = 1$.

Για $x=-1$ έχουμε $2 = -8\Gamma$ οπότε $\Gamma = -1/4$.

Για $x=3$ έχουμε $30 = 8A$ οπότε $A = 15/4$.

Επομένως:

$$f(x) = \frac{15}{4(3-x)} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4(x+1)}.$$

ii)

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της γεωμετρικής σειράς

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

έχουμε για $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{15}{12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-x)} = \frac{15}{12} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{4 \cdot 3^n} - 1 - \frac{(-1)^n}{4} \right) x^n .
 \end{aligned}$$