

① SOS ② $\rightarrow a, B, \delta$ ③ $\rightarrow B$
④ SOS - ⑤ SOS

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ΠΛΗ 12
4^η Εργασία 2016-2017

Σύνταξη – επιμέλεια

Παντελής . Π . Προδρομίδης

Σολωμού 29 Αθήνα

τηλ. 6942047218

email p27prodromidis@gmail.com

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 1. λύση: A) $\nexists$ Έχει διαδοχικά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1+3n}}{n^3 - n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e \cdot e^{3n}}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{3n}}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= e \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{3n}}{n^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right) \quad (\times) = e(\infty) \cdot 1 = e \cdot \infty = \infty$$

Τέλος: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1+3n}}{n^3 - n^2 + n} = \infty$

(*) Κριτήριο νιοστής ρίζας

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{3n}}{n^3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e^{3n}}}{\sqrt[n]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^3}{(\sqrt[n]{n})^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^3}{1} = e^3 \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^3}} = e^3 > 1$ έπεται $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{3n}}{n^3} = \infty$

ii/ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+2} \sin \frac{\theta}{2^n} =$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\theta}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} =$$

(Θέτουμε $\frac{\theta}{2^n} = u$ τότε $\mu\tau\ n \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$)

$$= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta u)}{u} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \theta \frac{\sin(\theta u)}{\theta u} =$$

(Θέτουμε $\theta u = t$ τότε $u \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$)

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \theta \frac{\sin t}{t} = 2\theta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} =$$

$$= 2\theta \cdot 1 = 2\theta$$

(*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

β) :/ Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου είναι

$$a_n = \frac{(n+1)!}{(2n)^n} > 0 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)!}{2^{n+1} (n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{2^n n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! \cdot 2^n n^n}{(n+1)! \cdot 2^{n+1} (n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)!} (n+2) 2^n n^n}{\cancel{(n+1)!} 2 \cdot 2^n (n+1)^n (n+1)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n (n+2)}{(n+1)^n (n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right] \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2e} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\begin{aligned} (*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ii/ Έχουμε Διαφορία

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n \right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n \right) \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} + n \right)}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} \right)^2 - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+a)(n+b) - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} + (a+b)n + ab - \cancel{n^2}}{\sqrt{\cancel{n^2} + (a+b)n + ab} + n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \left((a+b) + \frac{ab}{n} \right)}{\cancel{n} \left(\sqrt{1 + \frac{(a+b)}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1 \right)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Τελικά} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n \right) = \frac{a+b}{2}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

iii/ Έχουμε Διαφορικά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = -1 \quad \text{αν } |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

γιατί $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = 0 \quad \text{αν } x = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n \left(1 - \frac{1}{x^n}\right)}{x^n \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} = 1 \quad \text{αν } x > 1$$

γιατί $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$

$$\text{Τελικά: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \begin{cases} -1 & \text{αν } |x| < 1 \\ 0 & \text{αν } x = 1 \\ 1 & \text{αν } x > 1 \\ \text{Δεν υπάρχει} & \text{αν } x < -1 \end{cases}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 2. Λύση A) Έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{4n} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16n}\right)^{2n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(2 \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)^{4n} \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\right)^{2n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^{4n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n} \frac{1}{4^{2n}} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[16^n \cdot \frac{1}{16^n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n} \left(1 + \frac{1/4}{n}\right)^{2n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\left(1 + \frac{1/2}{n}\right)^n\right)^4 \left(\left(1 + \frac{1/4}{n}\right)^n\right)^2 \right] =$$

$$= \left(e^{1/2}\right)^4 \left(e^{1/4}\right)^2 = e^2 e^{1/2} = e^{5/2}$$

Επομένως η ακολουθία a_n συγκλίνει και είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{5/2}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) Η ακολουθία a_n γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2 \cdot 9^n + \lambda^{2n+1}}{4 \cdot 3^{2n} + 5 \cdot \lambda^{2n}} = \frac{2 \cdot 9^n + \lambda^{2n} \cdot \lambda}{4 \cdot 9^n + 5 \lambda^{2n}} = \frac{\lambda^{2n} \left(2 \cdot \frac{9^n}{\lambda^{2n}} + \lambda \right)}{\lambda^{2n} \left(4 \cdot \frac{9^n}{\lambda^{2n}} + 5 \right)} = \\ &= \frac{2 \left(\frac{9}{\lambda^2} \right)^n + \lambda}{4 \left(\frac{9}{\lambda^2} \right)^n + 5} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{9}{\lambda^2} \right)^n + \lambda}{4 \left(\frac{9}{\lambda^2} \right)^n + 5} = \frac{\lambda}{5}$$

$$\text{ότι } \left| \frac{9}{\lambda^2} \right| < 1 \Leftrightarrow |\lambda|^2 > 9 \Rightarrow |\lambda| > 3$$

$$\text{αφού } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{\lambda^2} \right)^n = 0$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 9^n + \lambda^{2n+1}}{4 \cdot 3^{2n} + 5 \lambda^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 9^n + \lambda^{2n} \cdot \lambda}{4 \cdot 9^n + 5 \lambda^{2n}} =$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{9^n} \left(2 + \frac{\lambda^{2n}}{\cancel{9^n}} \lambda \right)}{\cancel{9^n} \left(4 + 5 \frac{\lambda^n}{\cancel{9^n}} \right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\acute{\alpha}\nu \quad \left| \frac{\lambda^2}{9} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda|^2 < 9 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| < 3$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda^2}{9} \right)^n = 0$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{9}{\lambda^2} \right)^n + \lambda}{4 \left(\frac{9}{\lambda^2} \right)^n + 5} = (\lambda = \pm 3) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{9}{9} \right)^n + \lambda}{4 \left(\frac{9}{9} \right)^n + 5} = \frac{2+\lambda}{9}$$

$$\text{Τελικά} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \frac{\lambda}{5} & \acute{\alpha}\nu \quad |\lambda| > 3 \\ \frac{1}{2} & \acute{\alpha}\nu \quad |\lambda| < 3 \\ \frac{5}{9} & \acute{\alpha}\nu \quad \lambda = 3 \\ -\frac{1}{9} & \acute{\alpha}\nu \quad \lambda = -3 \end{cases}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\Gamma) \quad \text{Επειδή} \quad \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1} \right| = \frac{\left| \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{Επειδή} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1} = 0$$

$$\text{Οπότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

$\nearrow$ άρτιος $\rightarrow 1$
 $\searrow$ περιττός $\rightarrow -1$
 $\neq$

Συνεπώς το όριο της a_n δεν υπάρχει επομένως η ακολουθία δεν συχλίνει

ii/ Για την ακολουθία $b_n = \frac{d^n}{n}$ εφαρμόζεται το κριτήριο λόγου

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{d^{n+1}}{n+1}}{\frac{d^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d^n \cdot d \cdot n}{d^n (n+1)} \right| = \\ &= |d| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |d| \cdot 1 = |d| < 1 \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^n}{n} = 0$

Επιπλέον αν $d \geq 1$ παίρνουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{n} = 0$$

Τελικά η ακολουθία b_n συμπίπτει επαρκώς

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \hat{=} \quad b_n \text{ μνηστικη}$$

Δ) 1/ Έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n+k}} \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Εν τώ

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Επειδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

Εύκολο να βρούμε το ανώτερο παρεμβολή έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ii/ Είναι

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

και έχουμε

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}}$$

$$\begin{aligned} \text{Επειδή} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2n}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \infty = \infty \end{aligned}$$

$$\text{Επεται ότι} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 3. Λύση Α) Αρχικά θα δείξουμε $x_1 > 0$ με την βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής. Έχουμε διαδοχικά

Για $n=0$, $x_0 > 0$ που ισχύει. Αρκούμαστε ότι ισχύει

$x_{n-1} > 0$ (υπόθεση επαγωγής) θα δείξουμε ότι $x_n > 0$

Είναι $\sqrt{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1} > 0 \Leftrightarrow x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1 > 0$ που ισχύει

αφού $\Delta < 0$ άρα $x_n > 0$

Στη συνέχεια θα δείξουμε επαγωγικά ότι η

ακολουθία x_n είναι πτω φρεχτήνη με πτω φρέχτα το 1

(Η εξίσωση αναστροφής δίνει $x = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^2 = x^2 - x + 1$

$\Leftrightarrow x \geq 1$, οπότε άνω φρέχτα της x_n στο 1)

Έχουμε διαδοχικά

Για $n=0$, $x_0 < 1$ ισχύει.

Εστω ότι για κάποιο φυσικό $k-1$ ισχύει $x_{k-1} < 1$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Θα δείξουμε ότι $x_k < 1$. Πράγματι

$$x_k < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_{k-1}^2 - x_{k-1} + 1} < 1 \Leftrightarrow x_{k-1}^2 - x_{k-1} + 1 < 1 \Leftrightarrow$$

$$x_{k-1}^2 - x_{k-1} = 0 \Leftrightarrow x_{k-1}(x_{k-1} - 1) < 0 \quad \text{που ισχύει αφού}$$

$$x_{k-1} - 1 < 0 \quad \text{και} \quad x_{k-1} > 0. \quad \text{Αρα για κάθε } k \text{ και}$$

επομένως για κάθε φυσικό n ισχύει $x_n < 1$

Μονοτονία της ακολουθίας x_n

Εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς αφού $x_1 > 0$

$$\begin{aligned} x_n^2 - x_{n-1}^2 &= \left(\sqrt{x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1} \right)^2 - x_{n-1}^2 = \\ &= \cancel{x_{n-1}^2} - x_{n-1} + 1 - \cancel{x_{n-1}^2} = -x_{n-1} + 1 = \\ &= 1 - x_{n-1} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα} \quad x_n^2 - x_{n-1}^2 > 0 \Leftrightarrow x_n - x_{n-1} > 0 \Leftrightarrow x_n > x_{n-1}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Θηλωθί ή αφοουθία x_n γνυείως αύφουα

Ταλινί ή x_n ως γνυείως αύφουα και πίνω φραγγέν

αυμλίνη θηλ. υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιω ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

(Στήν θινί μας περίπτωση είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$)

B) Ο αναδρομικός τύπος δίνει το εύστημα

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$F_k = F_k$$

Το εύστημα γράφεται ισοδύναμα με τη βοήθεια
ως πίνακα

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = A A \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix} = \dots = A^k \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

Με $F_1 = 1$, $F_0 = 0$ παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Διγλωσσιούμεε τον συββεζρνωό πίνκνε A

Ιστωτι βέε του A υπολογίζουτε το χαρακτηριστωό

πολυώνυμο του A

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\text{Γέτουμε } \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = p_1, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = p_2$$

οι ιδιοτιμές του A

Ιδιοδιάνυσματα του A . Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = p_1$

έχουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda_1 I_2) \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-p_1 & 1 \\ 1 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-p_1)x + y = 0 \\ x - p_1 y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-p_1)p_1 y + y = 0 \\ x = p_1 y \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-p_1^2 + p_1 + 1)y = 0 \\ x = p_1 y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = p_1 y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\text{Ιδιοχώρος } V(\lambda_1) = \left\{ (x, y) = (p_1 y, y) = y(p_1, 1), y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{και το ιδιοδιάνυσμα το } \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Ομοίως για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = p_2$

$$(A - \lambda_2 I_2) \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-p_2 & 1 \\ -1 & -p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-p_2)x + y = 0 \\ x - p_2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-p_2)p_2 y + y = 0 \\ x = p_2 y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-p_2^2 + p_2 + 1)y = 0 \\ x = p_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p_2 y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ιδιοχώρος $V(\lambda_2) = \{ (x, y) = (p_2 y, y) = y (p_2, 1), y \in \mathbb{R} \}$

και ιδιοδιάνυσμα το $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Αν θέσουμε

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{το έχουμε}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} = D$$

Σηλ. $P^{-1} A P = D \Leftrightarrow A = P D P^{-1}$ απ' όπου

$$A^k = P D^k P^{-1} \quad (2)$$

$$\mu\epsilon \quad P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} 1 & -p_2 \\ -1 & p_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{bmatrix} 1 & -p_2 \\ -1 & p_1 \end{bmatrix}$$

Παίρνουμε από την (2)

$$A^k = P D^k P^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^k & 0 \\ 0 & p_2^k \end{bmatrix} \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{bmatrix} 1 & -p_2 \\ -1 & p_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{bmatrix} p_1^{k+1} & p_2^{k+1} \\ p_1^k & p_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -p_2 \\ -1 & p_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{bmatrix} p_1^{k+1} - p_2^{k+1} & -p_2 p_1^{k+1} + p_1 p_2^{k+1} \\ p_1^k - p_2^k & -p_2 p_1^k + p_1 p_2^k \end{bmatrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

14 (1) Δίνε

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{bmatrix} p_1^{k+1} - p_2^{k+1} & -p_2 p_1^{k+1} + p_1 p_2^{k+1} \\ p_1^k - p_2^k & -p_2 p_1^k + p_1 p_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{bmatrix} p_1^{k+1} - p_2^{k+1} \\ p_1^k - p_2^k \end{bmatrix} \quad \text{απ' όπου}$$

$$F_k = \frac{1}{p_1 - p_2} [p_1^k - p_2^k] \quad (3)$$

14 (3) ισχύει για κάθε k άρα και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Επομένως

$$F_n = \frac{1}{p_1 - p_2} [p_1^n - p_2^n] \quad (4)$$

Επιπλέον $p_1 - p_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ και

$$p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1^2 - (\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{-4}{2(1+\sqrt{5})} =$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$= \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = - \frac{1}{p_1} = -p_1^{-1}$$

Ετσι η (4) γίνεται

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[p_1^n - (-p_1)^{-n} \right]$$

Με $p_1 = \varphi$ παίρνουμε

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n} \right)$$

το ζητούμενο

Άσκηση 4. Λύση: Α) i / Για τήν αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^3}}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο νιοστής ρίζας (Cauchy) είσαι

$$a_n = \frac{3^n}{2^{n^3}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{Υπολογίζουμε το όριο}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{2^{n^3}}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n^3}}} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n^3/n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n^2}} = 3 \cdot 0 = 0$$

Επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$ συμπεραίνει ότι το κριτήριο

ή σειρά (i) συρμνίται

ii / Για τήν αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n^2+1)(n+1)!}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου (Alembert)

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\text{Είναι } a_n = \frac{(3n)!}{(n^2+1)(n+1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{(3(n+1))!}{((n+1)^2+1)(n+1+1)!} =$$

$$= \frac{(3n+3)!}{(n^2+2n+2)(n+2)!}$$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(3n+3)!}{(n^2+2n+2)(n+2)!}}{\frac{(3n)!}{(n^2+1)(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)! (n^2+1)(n+1)!}{(3n)! (n^2+2n+2)(n+2)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(3n)!} (3n+1)(3n+2)(3n+3) \cancel{(n^2+1)(n+1)!}}{\cancel{(3n)!} (n^2+2n+2) \cancel{(n+1)!} (n+2)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27n^5}{n^3} = 27 \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 27(\infty) = \infty$$

Επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty > 1$ σύμφωνα με το κριτήριο

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

η σειρά (ii) αποκλίνει

iii/ Για την εναλλασσόμενη αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2}$$

εφαρμόζουμε το κριτήριο Leibniz. Είναι $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$

Η ακολουθία $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$ είναι φθινική αφού:

$$a_n = \frac{2n-1}{n^2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ μειζυνική αφού:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{n^2} = 0$$

$$\text{Δίνουσα αφού: } a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n^2} > \frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^2(2n-1) > n^2(2n+1) \Leftrightarrow (n^2+2n+1)(2n-1) > n^2(2n+1) \Leftrightarrow$$

$$\underline{2n^3} - \underline{n^2} + \underline{4n^2} - \cancel{2n} + \cancel{2n} - 1 > \underline{2n^3} - \underline{n^2} \Leftrightarrow 2n^2 - 1 > 0 \text{ που}$$

ισχύει για $n \geq 1$. Επομένως η σειρά συρμλίνει

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

iv/ Για την αριθμητική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

παρατηρούμε ότι

$$a_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{A}{4n-1} + \frac{B}{4n+3} = \frac{A(4n+3) + B(4n-1)}{(4n-1)(4n+3)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(4n+3) + B(4n-1) \Leftrightarrow 1 = (4A+4B)n + (3A-B)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A+4B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Οπότε $a_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1/4}{4n-1} - \frac{1/4}{4n+3}$ και έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1/4}{4n-1} - \frac{1/4}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) =$$

$$= \text{τη γεωμετρική σειρά} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4 \cdot 0 - 1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n+3} \right) = -\frac{1}{4}$$

Συνεπώς η σειρά συγκλίνει

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

✓/ Για τὴν αριθμητικὴ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2-1}$ πρὸςτιρούμε ὅτι

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2-1} \sim \frac{\sqrt{n^2}}{3n^2} = \frac{1}{3n} = \beta_n$$

Επειδὴ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2-1}}{\frac{1}{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n\sqrt{n^2+1}}{3n^2-1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3n^2} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\cancel{3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, +\infty)$$

καὶ ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (p-σειρά μὲ $p=1$) αποκλίνει

σύμφωνα μὲ τὸ κριτήριον οριαμὲν σύμμοιων καὶ ἡ

σειρά (v) αποκλίνει

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) Για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n+1}}{(5n-1)25^n}$ εφαρμόζουμε

το κριτήριο λόγου (Alembert) είναι $c_n = \frac{(2x-1)^{2n+1}}{(5n-1)25^n}$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2x-1)^{2n+3}}{(5n+4)25^{n+1}}}{\frac{(2x-1)^{2n+1}}{(5n-1)25^n}} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\cancel{(2x-1)^{2n+1}} (2x-1)^2 (5n-1) \cancel{25^n}}{\cancel{(2x-1)^{2n+1}} (5n+4) \cancel{25^n} \cdot 25} \right| =$$

$$= \frac{|2x-1|^2}{25} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{5n+4} = \frac{|2x-1|^2}{25} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n(1 - \frac{1}{5n})}{5n(1 + \frac{4}{5n})} =$$

$$= \frac{|2x-1|^2}{25} \cdot 1 = \frac{|2x-1|^2}{25}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο έχουμε

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$A_v \quad \frac{|2x-1|^2}{25} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |2x-1|^2 < 25 \quad \Leftrightarrow \quad |2x-1| < \sqrt{25} \quad \Leftrightarrow$$

$$|2x-1| < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 < 2x-1 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5+1 < 2x < 5+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -4 < 2x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{2} < x < \frac{6}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 3$$

Επομένως για $-2 < x < 3$ η σειρά συγκλίνει

$$A_r \quad \frac{|2x-1|^2}{25} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |2x-1|^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad |2x-1| = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ ή } x = 3$$

Συμπώς για $x = -2$ ή $x = 3$ γίνεται

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(-2)-1)^{2n+1}}{(5n-1) 25^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n+1}}{(5n-1) 25^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25^n (-5)}{(5n-1) 25^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)}{5n-1} = -5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1} \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο σύγκλισης

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\text{Είναι } \frac{1}{5n-1} > \frac{1}{5n}$$

$$\text{Επειδή η σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ αποκλίνει}$$

αποκλίνει και η σειρά για $x = -2$

Ομοίως για $x = 3$ η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 3 \cdot 1)^{2n+1}}{(5n-1) 25^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{(5n-1) 25^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1}$$

$$\text{Επειδή } \frac{1}{5n-1} > \frac{1}{5n} \text{ και η σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} \text{ αποκλίνει}$$

αποκλίνει και η σειρά για $x = 3$

Τελικά η σειρά συγκλίνει για

$$x \in (-2, 3)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 5. Λύση: Α) $i/$ Είναι γνωστό ότι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Γέτουμε όπου $x \longrightarrow 3x^2$ στην παραπάνω ισότητα

$$\begin{aligned} e^{3x^2} &= 1 + 3x^2 + \frac{(3x^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(3x^2)^n}{n!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

Ομοίως Γέτουμε όπου $x \longrightarrow -3x^2$

$$\begin{aligned} e^{-3x^2} &= 1 - 3x^2 + \frac{(-3x^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(-3x^2)^n}{n!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε

$$e^{-3x^2} - e^{3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n!} =$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n - 1] \cdot \frac{3^n x^{2n}}{n!}$$

Επομένως παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{e^{-3x^2} - e^{3x^2}}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n - 1] \frac{3^n x^{2n-1}}{n!} = \\ &= -6x - 9x^5 - \frac{81}{20} x^9 - \dots \end{aligned}$$

Το ζητούμενο ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x)$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - e^{3x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-6x - 9x^5 - \frac{81}{20} x^9 - \dots \right) = 0 \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ii/ Είναι γνωστό ότι

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{for } x \in (-\infty, +\infty)$$

Θέτουμε όπου $x \rightarrow 4x$. Παιρνουμε διαδοχικά

$$\cos(4x) = 1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} (4x)^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^{2n} x^{2n} = 1 - 8x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^{2n} x^{2n} \Leftrightarrow$$

$$\cos(4x) - 1 + 8x^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^{2n} x^{2n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos(4x) - 1 + 8x^2}{x^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^{2n} x^{2n-4} =$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{256}{45} x^2 + \frac{512}{315} x^4 - \dots$$

Το ζητούμενο ανάπτυγμα της $g(x)$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x) - 1 + 8x^2}{x^4} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(-1)^2}{4!} 4^4 x^0 + \frac{(-1)^3}{6!} 4^6 x^2 + \frac{(-1)^4}{8!} 4^8 x^4 + \dots \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{32}{3} - \frac{256}{45} x^2 + \frac{512}{315} x^4 + \dots \right) = \frac{32}{3}$$

β) Είναι $f(x) = \frac{3x^2 + x}{-x^3 + 3x^2 + x - 3}$

$$\begin{aligned} \text{✓} \text{ Επιπλέον } -x^3 + 3x^2 + x - 3 &= -x^2(x-3) + (x-3) = \\ &= (x-3)(1-x^2) = (x-3)(1-x)(1+x) \end{aligned}$$

η συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + x}{(x-3)(1-x)(1+x)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{1-x} + \frac{\Gamma}{1+x} = \\ &= \frac{A(1-x)(1+x) + B(x-3)(1+x) + \Gamma(x-3)(1-x)}{(x-3)(1-x)(1+x)} \end{aligned}$$

$$3x^2 + x = A(1-x^2) + B(x^2 - 2x - 3) + \Gamma(-x^2 + 4x - 3) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + x = (-A + B - \Gamma)x^2 + (-2B + 4\Gamma)x + (A - 3B - 3\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -A + B - \Gamma = 3 \\ -2B + 4\Gamma = 1 \\ A - 3B - 3\Gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + B - \Gamma = 3 \\ -2B + 4\Gamma = 1 \\ -2B - 4\Gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + B - \Gamma = 3 \\ -2B + 4\Gamma = 1 \\ -4B = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -A + B - \Gamma = 3 \\ -2B + 4\Gamma = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -15/4 \\ B = -1 \\ \Gamma = -1/4 \end{cases}$$

$$\text{Τελικά: } f(x) = \frac{3x^2 + x}{-x^3 + 3x^2 + x - 3} = \frac{-15/4}{x-3} - \frac{2}{1-x} - \frac{1/4}{1+x}$$

$$\therefore \text{ Είναι γνωστό ότι } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \quad (1)$$

Εχουμε Διαδοχικά:

$$\frac{-15/4}{x-3} = \frac{15/4}{3-x} = \frac{15/4}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{5/4}{1-\frac{x}{3}}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Θέτουμε πάλι (1) όπου $x \rightarrow \frac{x}{3}$ και παίρνουμε

$$\frac{5/4}{1 - x/3} = \frac{5/4}{1 - x/3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n \quad (2)$$

Ομοίως θέτουμε όπου $x \rightarrow -x$ και παίρνουμε

$$\frac{1/4}{1+x} = \frac{1/4}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (3)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-15/4}{x-3} - \frac{1}{1-x} - \frac{1/4}{1+x} = (2), (1), (3) = \\ &= \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3^n} - 1 - \frac{1}{4} (-1)^n \right] x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5}{4 \cdot 3^n} - 1 - \frac{1}{4} (-1)^n \right] x^n \end{aligned}$$

Το ζητούμενο ανάπτυγμα της $f(x)$

