

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 2ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ (κάθε άλλη ορθή λύση είναι αποδεκτή)

Ημερομηνία Ανάρτησης:	Τετάρτη 16 Νοεμβρίου 2016
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας:	Κυριακή 18 Δεκεμβρίου 2016
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη 21 Δεκεμβρίου 2016 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Δευτέρα 26 Δεκεμβρίου 2016

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 2^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 3 (Χώροι εσωτερικού γινομένου)

Κεφάλαιο 4 (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)

Κεφάλαιο 5 (Χαρακτηριστικά μεγέθη και κανονικές μορφές γραμμικών απεικονίσεων)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό**

που υπάρχει στο: study.eap.gr

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό: **Κεφ6** (Διανυσματικοί Χώροι), **Κεφ7** (Βάσεις και Διάσταση),

Κεφ8 (Γραμμικές Απεικονίσεις), **Κεφ9** (Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα), **Κεφ10** (Διαγωνιοποίηση),

Κεφ11 (Τετραγωνικές Μορφές).

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : από Γραμμική Άλγεβρα: Διανυσματικοί Χώροι, Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνιοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- η εξοικείωση με τις έννοιες της ορθογωνιότητας, της προβολής και του ορθογώνιου συμπληρώματος ενός υπόχωρου,
- η κατανόηση της διαδικασίας μετατροπής μιας μη ορθοκανονικής βάσης ενός Ευκλείδειου χώρου σε μια νέα βάση που είναι ορθοκανονική μέσω της μεθόδου Gram-Schmidt,
- η σύνδεση της έννοιας της ορθοκανονικής βάσης στον $\mathbf{R}^n$ με την έννοια του ορθογώνιου πίνακα που ανήκει στον χώρο των πινάκων $M_{n,n}(\mathbf{R})$,
- η κατανόηση της έννοιας της γραμμικής απεικόνισης και συνεπώς η ικανότητα ελέγχου αν μια απεικόνιση είναι γραμμική ή όχι,
- η κατανόηση ορισμών που συνδέονται με τις γραμμικές απεικονίσεις και μετασχηματισμούς όπως πυρήνας, εικόνα, πίνακας αναπαράστασης, βαθμός, μηδενικότητα, μονομορφισμός, επιμορφισμός, ισομορφισμός.
- η κατανόηση του τρόπου υπολογισμού χαρακτηριστικών μεγεθών μιας γραμμικής απεικόνισης αλλά και ενός πίνακα που περιγράφει μια γραμμική απεικόνιση (ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα) και η χρήση των μεγεθών αυτών για τον υπολογισμό του αντίστροφου ενός πίνακα ή του μετασχηματισμού ενός πίνακα στην διαγώνια μορφή του όταν αυτό είναι εφικτό.
- η μελέτη χαρακτηριστικών μεγεθών της ειδικής κατηγορίας των ορθογώνιων πινάκων,
- η μελέτη τετραγωνικών μορφών και η σύνδεση τους με την περιγραφή κωνικών τομών.

**Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον.20) Κάθε διανυσματικός χώρος $\mathbf{R}^n$, που θεωρούμε εδώ, είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Με $u \cdot v$, συμβολίζουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των u και v στον $\mathbf{R}^n$.

α) (Μον.3) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των στοιχείων $(1 \ -2 \ 3)^T$ και $(1 \ -1 \ 1)^T$ του $\mathbf{R}^3$ και των στοιχείων $(-2 \ 3)^T$ και $(-1 \ 1)^T$ του $\mathbf{R}^2$.

β) (Μον.5) Να βρεθεί η τρίτη γραμμή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

αν αυτός είναι ορθογώνιος.

γ) (Μον.5) Έστω V ο υποχώρος του $\mathbf{R}^4$ που παράγεται από τα στοιχεία $u_1 = (1 \ -2 \ 2 \ 0)^T$, $u_2 = (0 \ -1 \ 1 \ -1)^T$ και $u_3 = (1 \ 2 \ -1 \ 5)^T$. Να βρεθεί μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $V^\perp$.

δ) (Μον.7) Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου W του $\mathbf{R}^3$ που παράγεται από τα $w_1 = (1 \ 1 \ 0)^T$ και $w_2 = (2 \ 0 \ 1)^T$ και η ορθή προβολή του $(1 \ 0 \ 0)^T$ επί του W .

Λύση Άσκησης 1.

α) Το συνημίτονο της γωνίας ω μεταξύ των μη μηδενικών στοιχείων u και v δίνεται από τον τύπο

$$\cos(\omega) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \quad (1).$$

Θέτουμε $u = (1 \ -2 \ 3)^T$ και $v = (1 \ -1 \ 1)^T$.

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο και τα μέτρα:

$$u \cdot v = 1 + (-2)(-1) + 3 = 6, \quad u \cdot u = 1 + (-2)(-2) + 9 = 14, \quad v \cdot v = 1 + (-1)(-1) + 1 = 3,$$

$$\|u\| = \sqrt{14} \text{ και } \|v\| = \sqrt{3}. \text{ Από την (1), έχουμε ότι } \cos(\omega) = 6 / \sqrt{42} = \sqrt{42} / 7.$$

Όμοια, θέτουμε $\alpha = (-2 \ 3)^T$ και $\beta = (-1 \ 1)^T$. Τότε,

$$\alpha \cdot \beta = (-2)(-1) + 3 = 5, \quad \alpha \cdot \alpha = (-2)(-2) + 9 = 13, \quad \beta \cdot \beta = (-1)(-1) + 1 = 2,$$

$$\|\alpha\| = \sqrt{13} \text{ και } \|\beta\| = \sqrt{2}. \text{ Από την (1), έχουμε ότι } \cos(\omega_1) = 5 / \sqrt{26} = 5\sqrt{26} / 26.$$

β) Εστω $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ η τρίτη γραμμή του A , δηλαδή $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

Ο A είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν οι γραμμές του αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^3$. Εύκολα διαπιστώνεται, θεωρώντας τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα, ότι οι δύο πρώτες γραμμές του A αποτελούν ορθοκανονικό υποσύνολο. Άρα, για να είναι ο A ορθογώνιος, πρέπει και αρκεί, το εσωτερικό γινόμενο της τρίτης γραμμής με την πρώτη, καθώς και με τη δεύτερη να είναι ίσο με 0 και το μέτρο του (α, β, γ) ίσο με 1. Οι συνθήκες αυτές ισοδυναμούν με τα ακόλουθα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha - 3\beta + 2\gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ -4\beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha = -5\beta, \\ \gamma = 4\beta \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \pm 1/\sqrt{42}, \alpha = -5\beta, \gamma = 4\beta.$$

Άρα,

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} \\ -5/\sqrt{42} & 1/\sqrt{42} & 4/\sqrt{42} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{42} & -1/\sqrt{42} & -4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

γ) Έστω $v = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T \in \mathbf{R}^4$. Τότε,

$$v \in V^\perp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v \cdot u_1 = 0 \\ v \cdot u_2 = 0 \\ v \cdot u_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Για την επίλυση του παραπάνω ομογενούς γραμμικού συστήματος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss, βρίσκοντας την ΑΚΜ του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftarrow (-1)\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα, $x_3 = -x_4$, $x_2 = -2x_4$ και $x_1 = -2x_4$ με x_4 αυθαίρετο και έτσι η λύση του ομογενούς συστήματος είναι $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (-2x_4 \ -2x_4 \ -x_4 \ x_4)^T = x_4 (-2 \ -2 \ -1 \ 1)^T$, οπότε:

$$V^\perp = \text{span}\{(-2 \ -2 \ -1 \ 1)^T\} \text{ με μία βάση το μονοσύνολο } \{(-2 \ -2 \ -1 \ 1)^T\}.$$

δ) Τα δύο διανύσματα $w_1 = (1, 1, 0)^T$, $w_2 = (2, 0, 1)^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, καθώς κανένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου και συνεπώς, αποτελούν βάση του W . Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt (βλ. Θεώρημα 3.6.1 και το Παράδειγμα 13 σελ. 167-168 του βιβλίου) στη βάση $\{w_1, w_2\}$:

Βήμα 1. Θέτουμε $u_1 = w_1 = (1, 1, 0)^T$ και υπολογίζουμε $w_2 \cdot u_1 = 2$, $u_1 \cdot u_1 = \|u_1\|^2 = 2$,

$$u_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (2 \ 0 \ 1)^T - \frac{2}{2} (1 \ 1 \ 0)^T = (1 \ -1 \ 1)^T.$$

Βήμα 2. Κανονικοποιούμε διαιρώντας με τα αντίστοιχα μέτρα $\|u_1\| = \sqrt{2}$, $\|u_2\| = \sqrt{3}$, έχουμε

$$\hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1 \ 0)^T, \quad \hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ -1 \ 1)^T.$$

Άρα, μία ορθοκανονική βάση του W είναι $B = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$.

Η προβολή w του τυχόντος διανύσματος $u = (x \ y \ z)^T \in \mathbf{R}^3$ ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης B δίνεται από τον τύπο

$$w = (u \cdot \hat{u}_1) \hat{u}_1 + (u \cdot \hat{u}_2) \hat{u}_2 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \hat{u}_1 + \frac{x-y+z}{\sqrt{3}} \hat{u}_2,$$

ή αντικαθιστώντας

$$w = \begin{pmatrix} \frac{5x+y+2z}{6} & \frac{x+5y-2z}{6} & \frac{x-y+z}{3} \end{pmatrix}^T.$$

Συνεπώς, η ορθή προβολή του $(1 \ 0 \ 0)^T$ επί του W είναι $(5/6 \ 1/6 \ 1/3)^T$.

Άσκηση 2 (Μον.20)

α) Να εξεταστεί αν οι παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές

i) (Μον.2) $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, με $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$.

ii) (Μον.2) $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, με $g(x,y,z) = (x+y+z, 1, 0)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$.

iii) (Μον.2) $h: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, με $h(x,y,z) = (xy, z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$.

β) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ που πληροί τις συνθήκες

$$\varphi(0,1,1) = (0,1,3), \varphi(1,0,1) = (5,4,3) \text{ και } \varphi(1,1,0) = (2,0,0).$$

i) (Μον.5) Να βρεθεί ο τύπος της φ .

ii) (Μον.7) Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα αναπαράστασης της φ ως προς τη συνήθη (διατεταγμένη) βάση B του $\mathbf{R}^3$. Στη συνέχεια, να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του $\text{Ker}\varphi$ και $\text{Im}\varphi$.

iii) (Μον.2) Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση φ είναι 1-1 και επί.

Λύση Άσκησης 2.

α)

i) Έστω $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$. Τότε,

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2) = \\ &= (x_1 + y_1, y_1 + z_1) + (x_2 + y_2, y_2 + z_2) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

Επίσης, $\lambda f(x,y,z) = \lambda(x+y, y+z) = (\lambda x + \lambda y, \lambda y + \lambda z) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = f(\lambda(x,y,z))$

για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$ και για κάθε $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Άρα, η f είναι γραμμική απεικόνιση.

ii) Επειδή $g(0,0,0) = (0,1,0) \neq (0,0,0)$, η g δεν είναι γραμμική.

iii) Για $\lambda = -1$, έχουμε ότι $(-1)h(1,-1,0) = (1,0)$, ενώ $h(-1,1,0) = (-1,0)$. Άρα, $(-1)h(1,-1,0) \neq h(-1,1,0)$ και έτσι, η h δεν είναι γραμμική.

β) i) Θετούμε $u = (0,1,1)$, $v = (1,0,1)$ και $w = (1,1,0)$. Έστω

$$\lambda u + \mu v + \nu w = (0,0,0).$$

Τότε, $\mu + \nu = \lambda + \nu = \lambda + \mu = 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε ότι $\lambda + \mu + \nu = 0$. Έτσι, $\lambda = \mu = \nu = 0$ και επομένως τα u, v και w είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή η διάσταση του $\mathbf{R}^3$ είναι 3 και το σύνολο $\{u, v, w\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έχουμε ότι το σύνολο $\{u, v, w\}$ είναι μία βάση του $\mathbf{R}^3$. Επομένως, για $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, υπάρχουν μοναδικά $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ έτσι, ώστε

$$(x,y,z) = \alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0)$$

ή ισοδύναμα, $\beta + \gamma = x$, $\alpha + \gamma = y$ και $\alpha + \beta = z$. Προσθέτοντας κατά μέλη,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

και έτσι, $\alpha = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $\beta = \frac{1}{2}(x-y+z)$ και $\gamma = \frac{1}{2}(x+y-z)$. Συνεπώς,

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}(-x+y+z)\varphi(0,1,1) + \frac{1}{2}(x-y+z)\varphi(1,0,1) + \frac{1}{2}(x+y-z)\varphi(1,1,0).$$

Εκτελώντας τις πράξεις, έχουμε ότι

$$\varphi(x,y,z) = (\frac{1}{2}(7x-3y+3z), \frac{1}{2}(3x-3y+5z), 3z).$$

Εναλλακτικά:

Εάν θεωρήσουμε ως A τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης ως προς τη συνήθη (διατεταγμένη) βάση έχουμε ότι ισχύει

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Από όπου παίρνουμε τον τύπο της γραμμικής απεικόνισης:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(7x-3y+3z) \\ \frac{1}{2}(3x-3y+5z) \\ 3z \end{pmatrix}$$

οπότε έχουμε ότι

$$\varphi(x,y,z) = (\frac{1}{2}(7x-3y+3z), \frac{1}{2}(3x-3y+5z), 3z).$$

Ο υπολογισμός του πίνακα αναπαράστασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην απάντηση της ii).

ii) Έστω $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ και $e_3 = (0,0,1)$

Εκφράζουμε τα $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ και $\varphi(e_3)$ σαν γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της βάσης $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\varphi(e_1) = (7/2, 3/2, 0) = 7/2e_1 + 3/2e_2 + 0e_3$$

$$\varphi(e_2) = (-3/2, -3/2, 0) = -3/2e_1 - 3/2e_2 + 0e_3$$

$$\varphi(e_3) = (3/2, 5/2, 3) = 3/2e_1 + 5/2e_2 + 3e_3.$$

Έτσι, ο πίνακα αναπαράστασης της φ ως προς τη συνήθη (διατεταγμένη) βάση

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ είναι ο:

$$\begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του παραπάνω πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \leftarrow -2\Gamma_2]{\Gamma_1 \leftarrow 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftarrow 1/3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftarrow -7\Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 4 & -26/3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \leftarrow 1/3\Gamma_3]{\Gamma_2 \leftarrow 1/4\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 1 & -26/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \leftarrow -5/3\Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \leftarrow 26/12\Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftarrow \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, $\text{Ker}\varphi = \{(0,0,0)\}$ και άρα, η διάσταση του πυρήνα της φ είναι 0. Καθώς ο υποχώρος $\text{Im}\varphi$ αντιστοιχεί στον χώρο των στηλών του πίνακα αναπαράστασης, αρκεί να βρούμε τις στήλες που παράγουν τον χώρο στηλών. Βρήκαμε ήδη την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα αναπαράστασης του φ , που περιέχει τα οδηγία στοιχεία στην 1^η, 2^η και 3^η στήλη. Άρα, μια βάση του $\text{Im}\varphi$ αποτελείται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις στήλες του πίνακα αναπαράστασης της φ ως προς τη βάση B . Δηλαδή, μια βάση του $\text{Im}\varphi$

είναι το σύνολο $\{(7/2, 3/2, 0), (-3/2, -3/2, 0), (3/2, 5/2, 3)\}$. Επομένως, η διάσταση του $\text{Im}\varphi$ είναι 3. Προφανώς, καθώς ο $\text{Im}\varphi$ είναι ο $\mathbf{R}^3$ οποιαδήποτε βάση του $\mathbf{R}^3$ είναι και βάση του $\text{Im}\varphi$, π.χ. η συνήθης βάση.

iii) Επειδή $\text{Ker}\varphi = \{(0, 0, 0)\}$, έχουμε ότι η φ είναι 1-1. Λόγω του ότι ο $\text{Im}\varphi$ έχει διάσταση 3 και είναι υποχώρος του $\mathbf{R}^3$, έχουμε ότι $\text{Im}\varphi = \mathbf{R}^3$. Δηλαδή, η γραμμική απεικόνιση φ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 3. (Μον.20) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- α) (Μον.3) Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Να εξετάσετε βάση των όρων του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αν ο πίνακας A αντιστρέφεται.
- β) (Μον.5) Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .
- γ) (Μον.5) Να εφαρμόσετε το θεώρημα Cayley-Hamilton για τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα του A .
- δ) (Μον.4) Να υπολογίσετε έναν πίνακα P ο οποίος έχει την ιδιότητα $P^{-1}AP = D$ όπου ο πίνακας D είναι διαγώνιος.
- ε) (Μον.3) Βασιζόμενοι στο ερώτημα (δ) υπολογίστε τον πίνακα A^{2016} .

Λύση της 3ης άσκησης

(α) Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A ,

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3\lambda + \lambda^2 + 2) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Δεδομένου ότι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι $2 \neq 0$ ο πίνακας A αντιστρέφεται.

(β)

Βήμα 1. Υπολογισμός ιδιοτιμών.

Για να βρω τις ιδιοτιμές του πίνακα λύνω την εξίσωση

$$\phi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

Συνεπώς το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A είναι $\sigma(A) = \{-1, 1, -2\}$.

Βήμα 2. Υπολογισμός βάσης για κάθε ιδιοχώρο .

Για $\lambda=-1$, έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda=-1$ είναι :

$$V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbf{R} \right\} = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

με αντίστοιχη βάση ιδιοδιανυσμάτων $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Για $\lambda=1$, έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_2 \\ x_3 = -1/2 x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_2 \\ 3/2 x_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_2 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_3 = x_2 = 0$$

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda=1$ είναι :

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbf{R} \right\} = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

με αντίστοιχη βάση ιδιοδιανυσμάτων $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Για $\lambda=-2$, έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{array} \right\}$$

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda=-2$ είναι :

$$V(-2) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbf{R} \right\} = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

με αντίστοιχη βάση ιδιοδιανυσμάτων $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

(γ) Σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton (Θεώρημα 5.1.3 σελ.272) κάθε πίνακας πληροί την χαρακτηριστική του εξίσωση. Συνεπώς εφόσον

$$\phi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

θα έχουμε

$$-A^3 - 2A^2 + A + 2I = 0$$

και άρα

$$2I = A^3 + 2A^2 - A = A(A^2 + 2A - I) \Leftrightarrow I = A \left\{ \frac{1}{2} (A^2 + 2A - I) \right\}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (A^2 + 2A - I) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Μπορεί κάποιος να ελέγξει ότι :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(δ) Τα διανύσματα $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε

διακεκριμένες ιδιοτιμές, (βλέπε στην Παρατήρηση 1, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ. 284),, άρα,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ και } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, $D = P^{-1}AP$.

(ε) Από την προηγούμενη σχέση

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{2016} = (PDP^{-1})^{2016} = PD^{2016}P^{-1}$$

Υπολογίζουμε τον P^{-1}

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_1 + \Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_3 + \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) = (I \mid P^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} A^{2016} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{2016} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2016} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{2016} - 1 & 2^{2016} - 1 \\ 0 & 2 - 2^{2016} & 1 - 2^{2016} \\ 0 & 2^{2017} - 2 & 2^{2017} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Σημείωση. Το παραπάνω αποτέλεσμα θα μπορούσε να υπολογιστεί και με τη χρήση του Cayley-Hamilton θεωρήματος. Έστω η πολωνυμική διαίρεση :

$$s^{2016} = q(s)(s^3 + 2s^2 - s - 2) + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Για να υπολογίσω τους συντελεστές $a_i, i=0,1,2$ του υπολοίπου $a_2s^2 + a_1s + a_0$ της παραπάνω διαίρεσης, παίρνω την παραπάνω σχέση για όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A

$$(-1)^{2016} = q(-1)((-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2) + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = a_2 - a_1 + a_0$$

$$1^{2016} = q(1)(1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 2) + a_21^2 + a_1 \times 1 + a_0 = a_2 + a_1 + a_0$$

$$(-2)^{2016} = q(-2)((-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2) + a_2(-2)^2 + a_1(-2) + a_0 = 4a_2 - 2a_1 + a_0$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα έχουμε

$$a_0 = \frac{4 - (-2)^{2016}}{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{3}(-1 + (-2)^{2016})$$

Άρα με την χρήση του Cayley-Hamilton θεωρήματος θα έχουμε

$$\begin{aligned} A^{2016} &= q(A)(A^3 + 2A^2 - A - 2I) + a_2A^2 + a_1A + a_0I = \\ &= q(A) \times 0 + a_2A^2 + a_1A + a_0I = \\ &= a_2A^2 + a_1A + a_0I \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$A^{2016} = \frac{1}{3}(-1 + (-2)^{2016})A^2 + \frac{4 - (-2)^{2016}}{3}I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2^{2016} - 1 & 2^{2016} - 1 \\ 0 & 2 - 2^{2016} & 1 - 2^{2016} \\ 0 & 2^{2017} - 2 & 2^{2017} - 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4 (Μονάδες 20)

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ και $B = I_3 - 2AA^T$.

α) (Μον.10) Να προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές του πίνακα B , τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα καθώς και μια βάση των αντίστοιχων ιδιοχώρων.

β) (Μον.10) Να προσδιοριστεί ο αριθμός $\kappa \in \mathbf{R}$ έτσι, ώστε ο πίνακας $B_\kappa = \kappa I_3 - 2AA^T$ να είναι θετικά ορισμένος.

Λύση της 4ης άσκησης

α)

$$\begin{aligned} B = I_3 - 2AA^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Βήμα 1. Υπολογισμός ιδιοτιμών.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι:

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+3).$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι

$$\lambda_1 = 1 \text{ (διπλή ιδιοτιμή) και } \lambda_2 = -3 \text{ (απλή ιδιοτιμή).}$$

Βήμα 2. Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$:

$$\text{Λύνουμε το σύστημα } BX = \lambda_1 X, \text{ όπου } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

και επομένως, $x = z$. Κατά συνέπεια, ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

με αντίστοιχη βάση ιδιοδιανυσμάτων $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -3$:

$$\text{Λύνουμε το σύστημα } BX = (-3)X, \text{ όπου } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

και επομένως, $x + z = 0$ και $y = 0$. Κατά συνέπεια, ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -3$ είναι:

$$V(-3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

με αντίστοιχη βάση ιδιοδιανυσμάτων $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

β)

$$B_\kappa = \kappa I_3 - 2AA^T = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa-2 & 0 & 2 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 2 & 0 & \kappa-2 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα B_κ , αφού είναι γνωστό ότι ισχύει:

ο πίνακας B_κ είναι θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

(Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ. 289, Ιδιότητα 3).

Θέτουμε $\mu = \lambda - \kappa + 1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B_κ είναι

$$P_{B_\kappa}(\lambda) = \det(B_\kappa - \lambda I) =$$
$$= \begin{vmatrix} \kappa-2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & \kappa-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \kappa-2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\mu & 0 & 2 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 2 & 0 & -1-\mu \end{vmatrix} = -(1-\mu)^2(\mu+3).$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα B_κ είναι

$$\lambda_1 = \kappa \text{ (διπλή ιδιοτιμή) και } \lambda_2 = \kappa-4 \text{ (απλή ιδιοτιμή).}$$

$$\text{Τελικά, } B_\kappa \text{ είναι θετικά ορισμένος} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa > 0 \\ \kappa-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa > 4.$$

Σημείωση. Ένας άλλος τρόπος να ελέγξουμε αν ο πίνακας B_κ είναι θετικά είναι να δούμε αν οι παρακάτω ορίζουσες είναι θετικές :

$$\kappa - 2 > 0, \begin{vmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa - 2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \kappa - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 2 & 0 & \kappa - 2 \end{vmatrix} > 0$$

ή ισοδύναμα

$$\kappa - 2 > 0, \quad \kappa(\kappa - 2) > 0, \quad \kappa(\kappa + 2)(\kappa - 4) > 0$$

Επιλύοντας τις παραπάνω ανισότητες θα πάρουμε $\kappa > 4$.

Άσκηση 5. (Μον. 20) Δίνεται η τετραγωνική μορφή:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$$

α) (Μον.2) Βρείτε έναν συμμετρικό πίνακα $A \in M_{2,2}(\mathbf{R})$ τέτοιον ώστε $Q = x^T A x$ όπου $x = (x_1 \ x_2)^T$.

β) (Μον.2) Είναι η παραπάνω τετραγωνική μορφή θετικά ορισμένη, αρνητικά ορισμένη ή αόριστη ;

γ) (Μον.8) Βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα $P \in M_{2,2}(\mathbf{R})$ και έναν διαγώνιο πίνακα $D \in M_{2,2}(\mathbf{R})$, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $P^T A P = D$.

δ) (Μον.8) Τι είδους κωνική τομή παριστάνει η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 12$;

Λύση της 5^{ης} άσκησης.

α) Η τετραγωνική μορφή Q γράφεται ως

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

και συνεπώς $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = A^T$.

β) Η τετραγωνική μορφή είναι **αόριστη**, δεδομένου ότι $a_{11} = 1 > 0$ αλλά $\det[A] = -24 < 0$. Ένας άλλος τρόπος για να ελέγξουμε το είδος της τετραγωνικής μορφής είναι από το πρόσημο των ιδιοτιμών. Στην περίπτωση μας, όπως θα δείξουμε παρακάτω οι ιδιοτιμές έχουν αντίθετο πρόσημο και συνεπώς η τετραγωνική μορφή είναι αόριστη.

γ)

Βήμα 1. Υπολογίζω ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .

Υπολογίζω τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης :

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_2 - A] = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1 - 5)(\lambda - 1 + 5) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 6)(\lambda + 4) = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = 6$ και $\lambda = -4$. Για κάθε μια από αυτές υπολογίζω τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα :

Για $\lambda = -4$, επιλύω το σύστημα :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -4 - 1 & -5 \\ -5 & -4 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{:(-5)}{\Leftrightarrow} -5x - 5y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$V(-4) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\rangle = \left\langle x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Για $\lambda=6$, επιλύω το σύστημα :

$$\begin{pmatrix} 6-1 & -5 \\ -5 & 6-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x - 5y = 0 \stackrel{:5}{\Leftrightarrow} x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Συνεπώς

$$V(6) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\rangle = \left\langle x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Βήμα 2. Δημιουργώ ορθογώνια ιδιοδιανύσματα.

(Αυτό είναι δυνατόν εφόσον ο πίνακας μου είναι συμμετρικός – βλέπε ιδιότητα 2 των συμμετρικών πινάκων στην σελ. 289 του βιβλίου της Γραμμικής Άλγεβρας).

Θέλω να μετατρέψω τα ιδιοδιανύσματα

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

σε ορθογώνια. Αυτό όμως δεν χρειάζεται εφόσον αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, και συνεπώς είναι μεταξύ τους ορθογώνια π.χ. $v_1 \cdot v_2 = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ (Θεώρημα 5.3.2).

Αρκεί να τα διαιρέσουμε με το μέτρο τους ώστε να αποκτήσουν μέτρο 1 π.χ.

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Βήμα 3. Σχηματίζω τον πίνακα P με τα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα

$$P = (u_1 \quad u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$P^T A P = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

δ) Θέτω

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = P \tilde{x}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
 Q(x_1, x_2) &= x^T A x = (P\tilde{x})^T A (P\tilde{x}) = (\tilde{x}^T P^T) A (P\tilde{x}) = \\
 &= \tilde{x} (P^T A P) \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \\
 &= -4\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2
 \end{aligned}$$

Η κωνική τομή είναι της μορφής

$$Q(x_1, x_2) = 12 \Leftrightarrow -4\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2 = 12 \Leftrightarrow -\frac{\tilde{x}_1^2}{3} + \frac{\tilde{x}_2^2}{2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{\tilde{x}_1^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

ή ισοδύναμα εφόσον ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$x = P\tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = P^{-1}x \stackrel{P^T P = I}{=} P^T x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

θα έχουμε μια υπερβολή της μορφής :

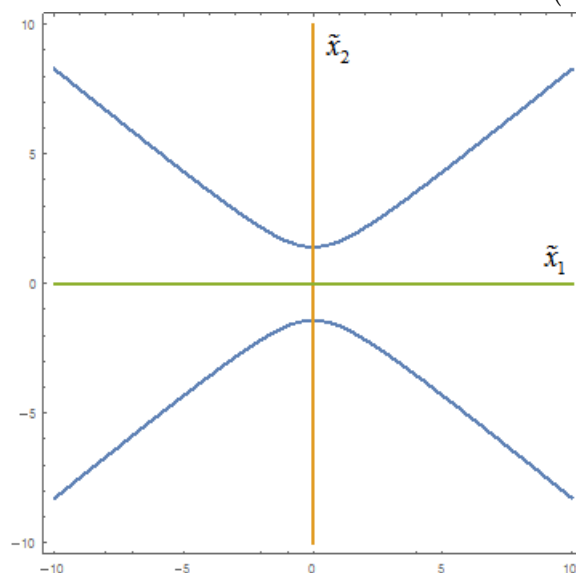
$$-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

Συνεπώς έχουμε στροφή της κωνικής τομής ως προς το κανονικό σύστημα συντεταγμένων. Για να δούμε το είδος της στροφής μπορούμε :

α) να σχεδιάσουμε τις ευθείες $\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0$ (ή ισοδύναμα $x_1 - x_2 = 0$) και

$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0$ (ή ισοδύναμα $x_1 + x_2 = 0$) οι οποίες θα αποτελούν τους άξονες του νέου

συστήματος συντεταγμένων στον οποίον έχουμε την υπερβολή $-\frac{\tilde{x}_1^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$,



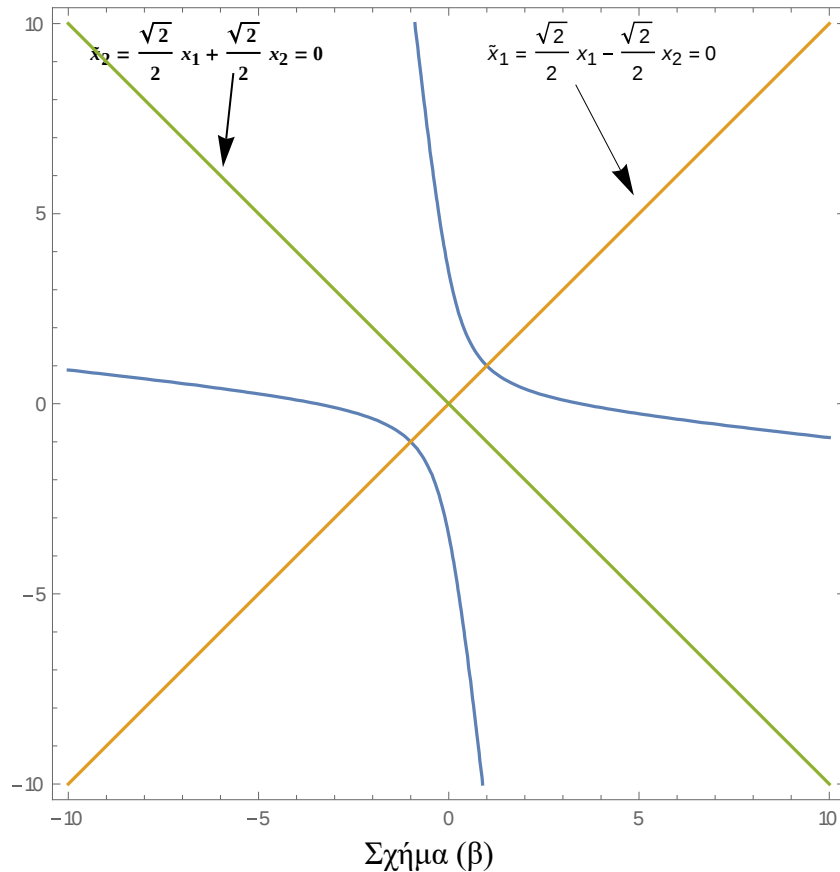
Σχήμα (α)

β) ή από την σχέση $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ να

καταλάβουμε ότι $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ και άρα το σύστημα συντεταγμένων θα στραφεί κατά

γωνία θ και στο νέο σύστημα συντεταγμένων θα έχουμε την υπερβολή $-\frac{\tilde{x}_1^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

.



Παρατηρήστε ότι ο άξονας των $x_1'x_1$ έστριψε αριστερόστροφα κατά γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$ προκειμένου να πάρουμε τον $\tilde{x}_1'x_1$ (αντίστοιχη στροφή έχουμε και για τον $x_2'x_2$).