

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	16/11/2016 23:59μμ
Ακ. Έτος	2016-17	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	1	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

Ημερομηνία ανάρτησης: Δευτέρα 3 Οκτωβρίου 2016
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας: Κυριακή 13 Νοεμβρίου 2016
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής: Τετάρτη 16 Νοεμβρίου 2016¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: Κυριακή 20 Νοεμβρίου 2016

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 1^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 1 (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα)

Κεφάλαιο 2 (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάσταση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** (study.eap.gr) ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : [Σύνολα Αριθμών,](#)
[Συναρτήσεις,](#)
[Πίνακες,](#)
[Οι Χώροι \$\mathbb{R}^n\$,](#)
[Διανυσματικοί Χώροι.](#)

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό: [Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες,](#)
[Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα,](#)
[Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα,](#)
[Κεφ4 Ορίζουσες,](#)
[Κεφ5 Οι χώροι \$\mathbb{R}^n\$,](#)
[Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι,](#)
[Κεφ7 Βάση και Διάσταση.](#)

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- Να σας εξοικειώσει με τις πράξεις πινάκων, την εύρεση κλιμακωτής μορφής πίνακα, τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα (είτε μέσω ιδιοτήτων ορίζουσών είτε με την μέθοδο Laplace), τα κριτήρια αντιστρεψιμότητας πίνακα και τον υπολογισμό του αντίστροφου (σε περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος), καθώς και την επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο (απαλοιφής) Gauss.
- Να σας βοηθήσει στην κατανόηση της δομής ενός διανυσματικού χώρου, του ελέγχου πότε ένα υποσύνολό του αποτελεί ή όχι διανυσματικό υπόχωρο, του ελέγχου γραμμικής ανεξαρτησίας και εξάρτησης διανυσμάτων, συνόλων γεννητόρων και βάσεων.

**Διαβάστε προσεκτικά την πλήρη εκφώνηση κάθε άσκησης.
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

A. (μον.7) Δίνεται ο 2×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ και ο 2×3 πίνακας $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν,

αν ορίζονται, οι πίνακες $A^2, A^T, B^T, AB, BA, A^T B, B^T B + BB^T$, όπου με A^T, B^T συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα A και του πίνακα B αντίστοιχα. Στην περίπτωση που δεν ορίζονται οι πίνακες να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

B. (μον.2) Να βρεθούν οι τιμές των a, b , ώστε να ισχύει $A + BC = D$ αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 7 & b \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} \\ -47 & 25 \end{pmatrix}.$$

C. (μον.4) Δίνεται ο πίνακας $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

i) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα X .

ii) Είναι ο πίνακας X αντιστρέψιμος; Αν ναι, υπολογίστε τον X^{-1} .

D. (μον.7) Για την ορίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -3 \\ 5 & 2 & x \end{vmatrix}$, να βρεθούν όλες οι πραγματικές τιμές του x για τις

οποίες μηδενίζεται.

Λύση της 1ης άσκησης

A.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 1 \\ 40 & 5 & -23 \end{pmatrix}$$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων B και A δεν γίνεται γιατί ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα B δεν είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα A .

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -5 & 11 \\ 40 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $B^T B$ είναι 3×3 και ο πίνακας BB^T είναι 2×2 , άρα το άθροισμα $B^T B + BB^T$ δεν ορίζεται.

B. Υπολογίζουμε πρώτα το πρώτο μέλος της σχέσης $A + BC = D$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} A + BC &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 7 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & \frac{1}{2} + 5b \\ 10a - 14 & 20 + 1 - 2b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & \frac{1}{2} + 5b \\ 10a - 14 & 21 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} + 5b \\ 10a - 17 & 25 - 2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Για να ισχύει η ζητούμενη σχέση πρέπει:

$$\begin{aligned} A + BC = D &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 7 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} \\ -47 & 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} + 5b \\ 10a - 17 & 25 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} \\ -47 & 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &36 = 36 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2} + 5b = \frac{5}{2} \\ &10a - 17 = -47 \\ &25 - 2b = 25 \end{aligned}$$

$$\text{Από τη σχέση } \frac{5}{2} + 5b = \frac{5}{2} \text{ έχουμε: } \frac{5}{2} + 5b = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5b = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$\text{Από τη σχέση } 10a - 17 = -47 \text{ έχουμε: } 10a = -47 + 17 \Leftrightarrow 10a = -30 \Leftrightarrow a = -3$$

$$\text{Η σχέση } 25 - 2b = 25 \text{ επαληθεύεται για } b = 0$$

Άρα η σχέση $A + BC = D$ ισχύει για $a = -3$ και $b = 0$.

C

i)

$$\det(X) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -3 \times 10 - (-24) = -30 + 24 = -6$$

ii) Επειδή η ορίζουσα του πίνακα X είναι διάφορη του μηδενός, όπως προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα, ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος. Για την εύρεση του αντιστρόφου του πίνακα X ακολουθούμε τη διαδικασία απαλοιφής. Δημιουργούμε αρχικά τον πίνακα

$$(X|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{ όπου } I \text{ είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Με κατάλληλες γραμμοπράξεις θα}$$

$$\text{δημιουργήσουμε τον πίνακα } (I|Y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & Y & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right), \text{ οπότε ο ζητούμενος αντίστροφος } X^{-1} \text{ του πίνακα } X \text{ θα}$$

είναι ο $X^{-1} = Y$. Έτσι,

$$(X|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftarrow -\frac{1}{3}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow -6r_1 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow -r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow \frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftarrow \frac{1}{3}r_2 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow -2r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftarrow -\frac{2}{3}r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{οπότε } X^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -4 & \frac{5}{2} & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -3 \\ 5 & 2 & x \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} x & -3 \\ 2 & x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = x^2 + 6 - 5x = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \text{ οπότε όλες οι πραγματικές}$$

τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται είναι $x=2, x=3$.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

A. (μον. 4) Δίδονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix}$.

- i. Να δικαιολογήσετε ποιοί από τους παραπάνω πίνακες είναι κλιμακωτοί και ποιοί δεν είναι.
- ii. Όποιος από τους παραπάνω πίνακες δεν είναι κλιμακωτός να γίνει κλιμακωτός και στη συνέχεια να γίνει ανηγμένος κλιμακωτός με κατάλληλες γραμμοπράξεις.

B. (μον. 6) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Να εξετάσετε αν τα διανύσματα-γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να κάνετε το ίδιο για τα διανύσματα-στήλες του πίνακα. Ποιός είναι ο βαθμός του πίνακα και γιατί;

C. (μον. 10) Δίνεται ο πίνακας $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Έστωσαν s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 τα διανύσματα-στήλες του παραπάνω πίνακα. Αφού πρώτα κάνετε τον πίνακα S κλιμακωτό να ελέγξετε:

- i. αν τα διανύσματα s_1, s_2, s_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- ii. αν τα διανύσματα s_1, s_2, s_3, s_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- iii. αν τα διανύσματα s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(Υπόδειξη: για την αντίστοιχη θεωρία μπορείτε να δείτε το σύγγραμμα του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου, ενότητα 2.6, σελ. 105.)

Λύση της 2ης άσκησης

A.
i.

Σύμφωνα με τον ορισμό του κλιμακωτού πίνακα (Σύγγραμμα ΕΑΠ "Γραμμική Άλγεβρα" σελ. 46):

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτός γιατί το οδηγό στοιχείο (το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο)

της 2^{ης} γραμμής δεν είναι τουλάχιστον μια θέση δεξιότερα από το οδηγό στοιχείο της 1^{ης} γραμμής.

Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτός γιατί τα οδηγά στοιχεία της 2^{ης} και της 3^{ης} γραμμής δεν

είναι τουλάχιστον μια θέση δεξιότερα από το οδηγό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.

Ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός γιατί τα οδηγά στοιχεία της 2^{ης} και της 3^{ης} γραμμής είναι

τουλάχιστον μια θέση δεξιάτερα από το οδηγό στοιχείο της αντίστοιχης προηγούμενης γραμμής.

ii.

Ένας κλιμακωτός πίνακας του A είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow -2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα δείτε το Σύγγραμμα ΕΑΠ "Γραμμική Άλγεβρα", σελ. 49

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του A είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow -2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow \frac{1}{7}r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow \frac{1}{4}r_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow -\frac{2}{7}r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{14} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ένας κλιμακωτός πίνακας του B είναι:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \leftarrow -4r_1 + r_2 \\ r_3 \leftarrow -2r_1 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow -\frac{3}{2}r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του B είναι:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftarrow -2r_1 + r_3]{r_2 \leftarrow -4r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow -\frac{3}{2}r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow -\frac{1}{8}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow -2r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow \frac{1}{9}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftarrow \frac{3}{4}r_3 + r_2]{r_1 \leftarrow -\frac{1}{2}r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός οπότε δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια γραμμοπράξη.

B.

Για τα διανύσματα γραμμές του πίνακα A:

Θέτουμε αρχικά τα διανύσματα γραμμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ να είναι στήλες σε έναν πίνακα B.

Οπότε ο πίνακας B είναι ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Δημιουργούμε στη συνέχεια έναν κλιμακωτό πίνακα του B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow -3r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -14 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow 7r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Επειδή και τα 3 διανύσματα-στήλες του κλιμακωτού πίνακα του B έχουν οδηγό στοιχείο, τα 3 αντίστοιχα διανύσματα-στήλες του πίνακα B είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Οι στήλες όμως του B είναι οι γραμμές του πίνακα A. Άρα τα διανύσματα-γραμμές του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Για τα διανύσματα στήλες του πίνακα A:

Δημιουργούμε έναν κλιμακωτό πίνακα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow -5r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow -\frac{1}{2}r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Επειδή στον κλιμακωτό πίνακα υπάρχει οδηγό στοιχείο και στις 3 στήλες, οι αντίστοιχες στήλες του αρχικού πίνακα A θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Ο βαθμός του πίνακα A είναι 3 γιατί έχουμε 3 διανύσματα-στήλες (ή γραμμές) γραμμικά ανεξάρτητα (Σύγγραμμα ΕΑΠ "Γραμμική Άλγεβρα", σελ. 48).

C.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \leftarrow -r_1 + r_4]{r_3 \leftarrow r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \leftarrow -r_2 + r_4]{r_3 \leftarrow 2r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftarrow \frac{1}{5}r_3 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

Παρατηρώντας τα διανύσματα-στήλες του κλιμακωτού πίνακα έχουμε:

- i. για τα διανύσματα s_1, s_2, s_3 : Επειδή οι 3 πρώτες στήλες του κλιμακωτού πίνακα έχουν οδηγό στοιχείο, τα αντίστοιχα διανύσματα στήλες s_1, s_2, s_3 του αρχικού πίνακα S είναι γραμμικά ανεξάρτητα
- ii. για τα διανύσματα s_1, s_2, s_3, s_4 : Επειδή οι 4 πρώτες στήλες του κλιμακωτού πίνακα έχουν οδηγό στοιχείο, τα αντίστοιχα διανύσματα στήλες s_1, s_2, s_3, s_4 του αρχικού πίνακα S είναι γραμμικά ανεξάρτητα
- iii. για τα διανύσματα s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 : Επειδή δεν υπάρχει οδηγό στοιχείο στην 5^η στήλη τα αντίστοιχα διανύσματα στήλες s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 του αρχικού πίνακα S δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Άσκηση 3 (Μον. 20)

A. (μον. 10) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

i. Να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

ii. Πώς ερμηνεύετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα;

B. (μον. 10) Να υπολογίσετε την πραγματική παράμετρο α , ώστε το γραμμικό σύστημα:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$5x_1 + 5x_2 - x_3 = 15 + \alpha$$

να έχει άπειρες λύσεις. Να δοθεί η λύση του συστήματος για την τιμή της παραμέτρου α που υπολογίσατε.

Λύση της 3ης άσκησης

A. i)

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ το άγνωστο διάνυσμα και

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ το σταθερό διάνυσμα, το αρχικό μας σύστημα γράφεται στη μορφή $Ax = b$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα $(A|b)$ και με γραμμοπράξεις δημιουργούμε μια κλιμακωτή μορφή του.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow -r_1 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow 2r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right) = (K|c)$$

Η λύση του συστήματος $Ax = b$ είναι ισοδύναμη με τη λύση του συστήματος $Kx = c$, όπου

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ και } c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Έτσι,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Kx = c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 + 2x_3 = 1$$

$$5x_3 = 5$$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε:

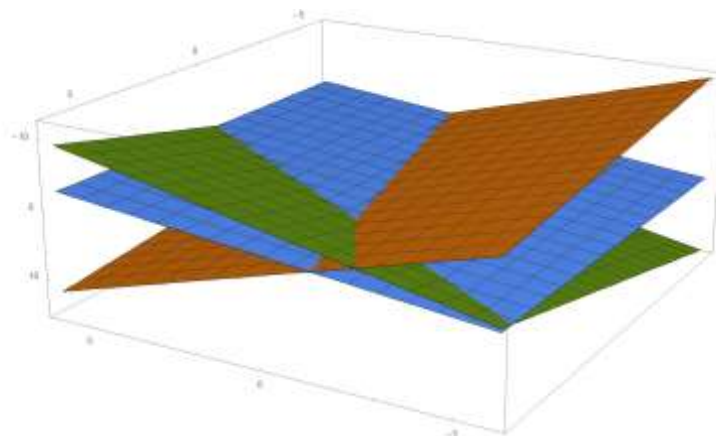
$$5x_3 = 5 \Leftrightarrow x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 1 \Leftrightarrow x_2 + 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 5$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ii) Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος παριστάνει ένα επίπεδο στον R^3 . Η τομή των τριών επιπέδων αναπαριστά την λύση του συστήματος. Επειδή έχουμε βρει μοναδική λύση του συστήματος τα 3 επίπεδα θα τέμνονται σε ένα σημείο, στο $(5, -1, 1)$, το οποίο είναι και η λύση του συστήματος.



B.

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$5x_1 + 5x_2 - x_3 = 15 + \alpha$$

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ το άγνωστο διάνυσμα

και $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 15 + \alpha \end{pmatrix}$ το σταθερό διάνυσμα, το αρχικό μας σύστημα γράφεται στη μορφή $Ax = b$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 15 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα $(A|b)$ και τον κάνουμε κλιμακωτό.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ 5 & 5 & -1 & 15+\alpha \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \leftarrow -5r_1 + r_3]{r_2 \leftarrow -2r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 10 & -6 & -5+\alpha \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow -2r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\alpha \end{array} \right)$$

Οπότε το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 5x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 0x_3 &= -1 + \alpha \end{aligned}$$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε:

Για $-1 + \alpha \neq 0$, δηλαδή για $\alpha \neq 1$, η τρίτη εξίσωση είναι αδύνατη.

Για $\alpha = 1$, η τρίτη εξίσωση γίνεται $0x_3 = -1 + \alpha \Rightarrow 0x_3 = -1 + 1 \Rightarrow 0x_3 = 0$, η οποία επαληθεύεται για κάθε x_3 πραγματικό αριθμό. Έστω $x_3 = t$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 5x_2 - 3x_3 &= -2 \Rightarrow 5x_2 - 3t = -2 \Rightarrow 5x_2 = 3t - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{3}{5}t - \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Από την πρώτη παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 + 4 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}t - \frac{2}{5} - t + 4 \Rightarrow \\ x_1 &= -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5} \end{aligned}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5} \\ \frac{3}{5}t - \frac{2}{5} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}t \\ \frac{3}{5}t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. (Μον. 20)

A. (μον.8) Να εξετάσετε (με χρήση του ορισμού) αν τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$, υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^2$.
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 3x + 5y = 2\}$, υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^2$.
- $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 2y - z = 0\}$, υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^3$.

B. (μον. 12) Θεωρούμε τους υπόχωρους V, W του $\mathbb{R}^3$ που ορίζονται ως εξής:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y + z = 0\} \text{ και } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}.$$

- Να βρείτε μία βάση του V και μία βάση του W .
- Να βρείτε μία βάση της τομής $V \cap W$.
- Να βρείτε τη διάσταση του υποχώρου $V + W$.

Λύση της 4ης άσκησης

A)

i) Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το A είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων. Εξετάζουμε την κλειστότητα ως προς πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό. Αν $(x, y) \in A$ τότε $x \geq 0$ και αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε για να έχουμε $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in A$ πρέπει να ισχύει ότι και $\lambda x \geq 0$. Όμως αυτό δεν ισχύει πάντα, π.χ. για $(x, y) = (1, 1)$ (το οποίο είναι στοιχείο του A) και $\lambda = -1$. Άρα το A δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

ii) Αν $(x, y) \in B$ και $(z, w) \in B$, τότε $3x + 5y = 2$ και $3z + 5w = 2$, άρα $3(x + z) + 5(y + w) = 4$, επομένως $(x + z, y + w) = (x, y) + (z, w) \notin B$. Άρα το B δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ αφού δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων.

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι το B δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ αφού το $(0, 0)$ δεν ανήκει σε αυτό.

iii) Το Γ είναι μη κενό αφού το $(0, 0, 0)$ ανήκει στο Γ . Επιπλέον δείχνουμε ότι είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό. Πράγματι, αν $(x, y, z) \in \Gamma$, $(s, t, u) \in \Gamma$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mu \in \mathbb{R}$, τότε $3x + 2y - z = 0$ και $3s + 2t - u = 0$, επομένως $3(\lambda x + \mu s) + 2(\lambda y + \mu t) - (\lambda z + \mu u) = \lambda(3x + 2y - z) + \mu(3s + 2t - u) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $(\lambda x + \mu s, \lambda y + \mu t, \lambda z + \mu u) = \lambda(x, y, z) + \mu(s, t, u) \in \Gamma$. Άρα το Γ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

B)

i)

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x - 2y\} = \{(x, y, -2x - 2y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, -2) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}.$$

Τα διανύσματα $(1, 0, -2)$ και $(0, 1, -2)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι, αν

$$\lambda(1, 0, -2) + \mu(0, 1, -2) = (0, 0, 0), \text{ τότε } (\lambda, \mu, -2\lambda - 2\mu) = (0, 0, 0), \text{ επομένως } \lambda = \mu = 0. \text{ Συνεπώς, μία βάση του } V \text{ είναι το σύνολο } \{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}.$$

Όμοια,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x - 2y\} = \{(x, y, -x - 2y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}.$$

Τα διανύσματα $(1,0,-1)$ και $(0,1,-2)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι, αν $\lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,-2) = (0,0,0)$, τότε $(\lambda, \mu, -\lambda - 2\mu) = (0,0,0)$, επομένως $\lambda = \mu = 0$. Συνεπώς, μία βάση του W είναι το σύνολο $\{(1,0,-1), (0,1,-2)\}$.

ii) Το $V \cap W$ είναι το σύνολο λύσεων του γραμμικού συστήματος

$$2x + 2y + z = 0$$

$$x + 2y + z = 0$$

το οποίο λύνουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή από την οποία άμεσα βρίσκουμε τη γενική λύση: $x = 0$ και θέτοντας $z = t$, αυθαίρετο, παίρνουμε $y = -\frac{1}{2}t$. Επομένως,

$V \cap W = \{(0, -\frac{1}{2}t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(0, -\frac{1}{2}, 1)\}$. Το διάνυσμα $(0, -\frac{1}{2}, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι μη μηδενικό, άρα το σύνολο $\{(0, -\frac{1}{2}, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και αποτελεί βάση του $V \cap W$.

iii) Από τα προηγούμενα δύο ερωτήματα, έπεται ότι $\dim(V) = \dim(W) = 2$ και $\dim(V \cap W) = 1$. Από γνωστό θεώρημα, έπεται ότι $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Άσκηση 5. (Μον. 20)

A. (μον. 8) Να εξετάσετε αν το $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 2y & -y \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$, υποσύνολο του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$, αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο. Αν ναι, να δώσετε βάση και διάσταση του V .

B. (μον. 12) Θεωρούμε τους διανυσματικούς υπόχωρους $U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ και $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ του $M_{22}(\mathbb{R})$. Να δώσετε βάση και διάσταση του $U+W$.

Λύση της 5ης άσκησης

A) Το γενικό στοιχείο του V γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός σταθερών πινάκων και έτσι έχουμε ότι ο V είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών πεπερασμένου υποσυνόλου του $M_{22}(\mathbb{R})$ ως εξής

$$\begin{aligned} V = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 2y & -y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει άμεσα ότι ο V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_{22}(\mathbb{R})$. Επίσης, οι πίνακες

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του V , διότι, αν

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ τότε } \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 2\mu & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ δηλαδή } \lambda = \mu = \nu = 0. \text{ Επομένως,}$$

μία βάση του V είναι το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ και άρα $\dim(V)=3$.

B. Ο υπόχωρος $U+W$ παράγεται από την ένωση των γεννητόρων των δύο υποχώρων δηλαδή

$$U+W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Για να βρούμε μία βάση του } U+W \text{ αρκεί να βρούμε}$$

μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του παραπάνω συνόλου γεννητόρων του $U+W$.

Χρησιμοποιούμε την συνήθη διατεταγμένη βάση του $M_{22}(\mathbb{R})$

$$B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ και σχηματίζουμε τον πίνακα } \Pi \text{ με στήλες τις}$$

συνιστώσες των πινάκων $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ως προς την βάση B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Ομοια έχουμε:} \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και στην συνέχεια βρίσκουμε μία κλιμακωτή μορφή του:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \leftarrow \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από την κλιμακωτή μορφή αυτή έχουμε ότι μία βάση του $U+W$ αποτελείται από τους τρεις πρώτους πίνακες δηλαδή $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, επομένως, η διάστασή του ισούται με 3 ($\dim(U+W)=3$).