

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 6

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 9) Έστω S το σύνολο των φυσικών αριθμών οι οποίοι έχουν τέσσερα ψηφία όταν γράφονται στο δεκαδικό σύστημα και κανένα από τα ψηφία τους δεν ισούται με 0, 2, 5, 7 ή 9.

(i) Πόσα στοιχεία του S είναι περιττοί αριθμοί;

(ii) Πόσα στοιχεία του S είναι αριθμοί μικρότεροι του 2019;

(iii) Πόσα στοιχεία του S εμφανίζουν κάποιο ψηφίο πάνω από μια φορά;

β) (μον. 6) Η Αρσινόη, ο Βάιος, η Γαλάτεια, ο Δημόδοκος, η Εριφύλη, ο Ζεβεδαίος, η Ηρωδιάδα, ο Θεόφραστος, η Ιοκάστη, ο Κρέων, η Λευκοθέα, ο Μελέαγρος, η Ναυσικά, ο Ξέναρχος και η Οφηλία απαρτίζουν το δεκαπενταμελές μαθητικό συμβούλιο ενός σχολείου και διενεργούν μεταξύ τους κλήρωση ώστε να σχηματιστεί πενταμελής επιτροπή η οποία θα οργανώσει την πολυήμερη εκδρομή του σχολείου. Να υπολογιστεί η πιθανότητα:

(i) η επιτροπή να απαρτίζεται από 3 αγόρια και 2 κορίτσια,

(ii) τουλάχιστον 1 μέλος της επιτροπής να είναι αγόρι.

γ) (μον. 2) Στην αρχή μιας παρτίδας πόκερ, ένας παίκτης λαμβάνει 5 χαρτιά από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει καρέ του βαλέ, δηλαδή να έχει λάβει και τους 4 βαλέδες της τράπουλας;

δ) (μον. 3) Ένα ζαχαροπλαστείο παρασκευάζει σοκολατάκια 10 διαφορετικών ειδών τα οποία συσκευάζει σε σακουλάκια των 30 τεμαχίων. Πόσες διαφορετικές συσκευασίες είναι σε θέση να προσφέρει το ζαχαροπλαστείο;

Λύση της 1ης άσκησης

α) Τα επιτρεπόμενα ψηφία ενός αριθμού στο S είναι τα 1, 3, 4, 6, 8. Υπάρχουν επομένως 5 επιλογές για καθένα από τα τέσσερα ψηφία, άρα υπάρχουν $5^4 = 625$ στοιχεία του S .

(i) Για να είναι ένας αριθμός στο S περιττός πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο του να είναι περιττός, δηλαδή να ισούται με 1 ή 3. Υπάρχουν επομένως 5 επιλογές για το πρώτο ψηφίο, 5 επιλογές για το δεύτερο ψηφίο, 5 επιλογές για το τρίτο ψηφίο και 2 επιλογές για το τέταρτο ψηφίο, άρα $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$ στοιχεία του S τα οποία είναι περιττοί αριθμοί.

(ii) Αν ένας αριθμός στο S είναι μικρότερος του 2019 θα πρέπει αναγκαστικά το πρώτο του ψηφίο να ισούται με 1. Υπάρχουν 5 επιλογές για το δεύτερο ψηφίο, 5 επιλογές για το τρίτο ψηφίο και 5 επιλογές για το τέταρτο ψηφίο, άρα $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ στοιχεία του S τα οποία είναι μικρότερα από το 2019.

(iii) Υπολογίζουμε πρώτα πόσα είναι τα στοιχεία του S των οποίων τα ψηφία δεν επαναλαμβάνονται. Υπάρχουν 5 επιλογές για το πρώτο ψηφίο. Από τη στιγμή που θα επιλεγεί το πρώτο ψηφίο, απομένουν 4 επιλογές για το δεύτερο ψηφίο. Από τη στιγμή που θα γίνει η επιλογή και του δεύτερου ψηφίου απομένουν 3 επιλογές για το τρίτο ψηφίο. Τέλος, από τη στιγμή που θα επιλεγεί και το τρίτο ψηφίο, απομένουν 2 επιλογές για το τέταρτο ψηφίο. Επομένως υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ στοιχεία του S των οποίων τα ψηφία δεν επαναλαμβάνονται. Συνεπώς υπάρχουν $625 - 120 = 505$ στοιχεία του S τα οποία εμφανίζουν κάποιο ψηφίο πάνω από μια φορά.

β) Υπάρχουν $\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{120} = 3003$ διαφορετικές πενταμελείς επιτροπές που μπορούν να σχηματιστούν από τα δεκαπέντε μέλη του μαθητικού συμβουλίου.

(i) Υπάρχουν $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ τρόποι επιλογής 3 αγοριών ανάμεσα στα 7 αγόρια και $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$ τρόποι επιλογής 2 κοριτσιών ανάμεσα στα 8 κορίτσια. Επομένως υπάρχουν συνολικά $35 \cdot 28 = 980$ διαφορετικές επιτροπές που απαρτίζονται από 3 αγόρια και 2 κορίτσια. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $\frac{980}{3003} = \frac{140}{429}$.

(ii) Υπάρχουν $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ πενταμελείς επιτροπές που απαρτίζονται μόνο από κορίτσια. Συνεπώς, υπάρχουν $3003 - 56 = 2947$ επιτροπές που περιέχουν τουλάχιστον 1 αγόρι. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $\frac{2947}{3003} = \frac{421}{429}$.

γ) Υπάρχουν $\binom{52}{5}$ συνδυασμοί 5 χαρτιών από τα 52 που έχει η τράπουλα. Αφού όλοι οι βαλέδες της τράπουλας θα βρίσκονται στον ζητούμενο συνδυασμό, υπάρχουν 48 δυνατότητες για το χαρτί που απομένει. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $\frac{48}{\binom{52}{5}} = \frac{5! \cdot 48}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{1}{54145}$.

δ) Εδώ έχουμε συνδυασμούς 10 διαφορετικών ειδών ανά 30 με επανατοποθέτηση, άρα το ζαχαροπλαστείο μπορεί συνολικά να προσφέρει $\binom{30+10-1}{30} = \binom{39}{30} = \binom{39}{9} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{9!} = 211915132$ διαφορετικές συσκευασίες.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 3) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα τέτοια ώστε $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{10}$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A \cap B)$.

β) (μον. 5) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και A, B ενδεχόμενα τέτοια ώστε $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ και $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

γ) (μον. 5) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και A, B ενδεχόμενα τέτοια ώστε $P(B) = \frac{3}{5}$ και $P(A' | B') = \frac{1}{3}$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A \cup B)$.

δ) (μον. 7) Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$ με $n \geq m \geq k$. Να αποδειχθεί ότι $\binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m} \binom{m}{k}$.

Λύση της 2ης άσκησης

α) Αφού τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, έχουμε ότι $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{20}$.

β) Αφού $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ και $P(A)P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$, έχουμε ότι $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

$$\gamma) \frac{1}{3} = P(A' | B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P((A \cup B)')}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{5}{2}(1 - P(A \cup B)). \text{ Επομένως, } P(A \cup B) = \frac{13}{15}.$$

$$\delta) \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \binom{n}{m} \binom{m}{k}.$$

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 10) Από κλινικά δεδομένα ασθενών που χρειάστηκαν αιμοδοσία προκύπτει ότι:

- το 38% των ασθενών ανήκει στην ομάδα αίματος A.
- το 13% των ασθενών ανήκει στην ομάδα αίματος B.
- το 5% των ασθενών ανήκει στην ομάδα αίματος AB.
- το 44% των ασθενών ανήκει στην ομάδα αίματος O.

Με βάση τις απαντήσεις των ασθενών όταν ρωτήθηκαν (πριν από την αιμοδοσία) σε ποιά ομάδα αίματος ανήκουν προκύπτει επίσης ότι:

- το 88% όσων ανήκουν στην ομάδα αίματος A απάντησαν ότι ανήκουν στην ομάδα αίματος A.
- το 4% όσων ανήκουν στην ομάδα αίματος B απάντησαν ότι ανήκουν στην ομάδα αίματος A.
- το 10% όσων ανήκουν στην ομάδα αίματος AB απάντησαν ότι ανήκουν στην ομάδα αίματος A.
- το 4% όσων ανήκουν στην ομάδα αίματος O απάντησαν ότι ανήκουν στην ομάδα αίματος A.

(i) Ποιό είναι το ποσοστό του ασθενών που απάντησαν ότι ανήκουν στην ομάδα αίματος A;

(ii) Από τους ασθενείς που απάντησαν ότι ανήκουν στην ομάδα αίματος A, ποιό ποσοστό πραγματικά ανήκει στην ομάδα αίματος A;

β) (μον. 10) Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ cxe^{-x}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}, \text{ όπου } c \text{ σταθερά. Να υπολογιστεί η τιμή του } c, \text{ η μέση τιμή της } X \text{ και η}$$

πιθανότητα $P(1 < X \leq 10)$.

Λύση της 3ης άσκησης

α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$A = \text{«ο ασθενής ανήκει στην ομάδα αίματος A»}$

$B = \text{«ο ασθενής ανήκει στην ομάδα αίματος B»}$

$C = \text{«ο ασθενής ανήκει στην ομάδα αίματος AB»}$

$D = \text{«ο ασθενής ανήκει στην ομάδα αίματος O»}.$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $P(A) = \frac{38}{100}$, $P(B) = \frac{13}{100}$, $P(C) = \frac{5}{100}$, $P(D) = \frac{44}{100}$. Θεωρούμε επίσης το

ενδεχόμενο $E = \text{«ο ασθενής απάντησε ότι ανήκει στην ομάδα αίματος A»}$. Από τα δεδομένα έχουμε ότι

$$P(E | A) = \frac{88}{100}, P(E | B) = \frac{4}{100}, P(E | C) = \frac{10}{100}, P(E | D) = \frac{4}{100}.$$

(i) Ο νόμος ολικής πιθανότητας δίνει $P(E) = P(E | A)P(A) + P(E | B)P(B) + P(E | C)P(C) + P(E | D)P(D)$

$$= \frac{88}{100} \cdot \frac{38}{100} + \frac{4}{100} \cdot \frac{13}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{4}{100} \cdot \frac{44}{100} = \frac{3622}{10000} = \frac{1811}{5000}.$$

$$(ii) \text{ Από το νόμο του Bayes, } P(A | E) = \frac{P(E | A)P(A)}{P(E)} = \frac{\frac{88}{100} \cdot \frac{38}{100}}{\frac{1811}{5000}} = \frac{3344}{3622} = \frac{1672}{1811}.$$

β) Αφού η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, θα πρέπει να ισχύει ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως πρέπει να βρεθεί η μη αρνητική σταθερά c για την οποία ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Αυτό δίνει

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + c \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = c \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-x} dx.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, έχουμε ότι $\int x e^{-x} dx = -\int x (e^{-x})' dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$, όπου C σταθερά.

$$\text{Επομένως, } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-x} dx = -\lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-x}(x+1)) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}(b+1)) = 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b+1}{e^b}.$$

Το όριο $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b+1}{e^b}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, και, από τον κανόνα L'Hôpital, ισούται με $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} = 0$. Άρα $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-x} dx = 1$,

το οποίο συνεπάγεται ότι $c = 1$.

$$\text{Η μέση τιμή της } X \text{ επομένως ισούται με } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^2 e^{-x} dx.$$

Όμως $\int x^2 e^{-x} dx = -\int x^2 (e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$. Από τον υπολογισμό του $\int x e^{-x} dx$ που έγινε παραπάνω, έπεται ότι $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x+1) + C$, όπου C σταθερά. Επομένως,

$$E(X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^2 e^{-x} dx = -\lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-x}(x^2 + 2x + 2)) \Big|_0^b = 2 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2 + 2b + 2}{e^b}.$$

Το όριο $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2 + 2b + 2}{e^b}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, άρα, εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hôpital δύο φορές παίρνουμε ότι

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2 + 2b + 2}{e^b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2b + 2}{e^b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^b} = 0.$$

$$\text{Άρα } E(X) = 2.$$
$$\text{Τέλος, } P(1 < X \leq 10) = \int_1^{10} f(x) dx = \int_1^{10} x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) \Big|_1^{10} = \frac{2e^9 - 11}{e^{10}}.$$

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Ο αριθμός X των μηνυμάτων ηλεκτρονικού ταχυδρομείου που φτάνουν ανά ώρα σε κάποιο λογαριασμό ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 10$. Ποιά είναι η πιθανότητα να φτάσουν στον λογαριασμό τουλάχιστον 3 μηνύματα μέσα σε μια ώρα;

β) (μον. 8) Η διάρκεια ζωής Y (σε έτη) μιας ηλεκτρονικής συσκευής ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 3$.

(i) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y > 3)$.

(ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y > 6 | Y > 3)$.

γ) (μον. 8) Η πιθανότητα επιβίωσης ενός ασθενούς μετά από καρδιακή προσβολή είναι 90%. Αν έχουμε 40 ασθενείς που έχουν πάθει καρδιακή προσβολή,

(i) ποιά είναι η πιθανότητα να επιβιώσουν όλοι;

(ii) ποιά είναι η πιθανότητα το πολύ 4 από τους ασθενείς να αποβιώσουν;

Λύση της 4ης άσκησης

$$\alpha) P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-10} - 10e^{-10} - \frac{10^2}{2!} e^{-10} = 1 - \frac{61}{e^{10}}.$$

β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ισούται με

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, για $x \geq 0$. Για $\lambda = 3$ έχουμε επομένως ότι $F(x) = 1 - e^{-3x}$, για $x > 0$.

(i) $P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - (1 - e^{-9}) = \frac{1}{e^9}$.

(ii) $P(Y > 6 | Y > 3) = \frac{P(Y > 6 \text{ και } Y > 3)}{P(Y > 3)} = \frac{P(Y > 6)}{P(Y > 3)} = \frac{1 - P(Y \leq 6)}{1 - P(Y \leq 3)} = \frac{1 - (1 - e^{-18})}{1 - (1 - e^{-9})} = \frac{1}{e^9}$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι $P(Y > 6 | Y > 3) = P(Y > 6 - 3) = P(Y > 3)$. Αυτό είναι αναμενόμενο, λόγω της ιδιότητας της αμνησίας της εκθετικής κατανομής (βλ. σελίδα 127 του συγγράμματος του ΕΑΠ «Πιθανότητες και Στατιστική Ι» του Ι. Κουτρουβέλη).

γ) Έστω $p = \frac{9}{10}$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή W η οποία περιγράφει, σε τυχαίο δείγμα 40 ασθενών οι οποίοι έπαθαν καρδιακή προσβολή, τον αριθμό των ασθενών που επέζησαν. Η W ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $B(40, p)$.

(i) $P(W = 40) = \binom{40}{40} p^{40} (1-p)^0 = p^{40}$.

(ii) Πρέπει να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(W \geq 36)$. Αυτή ισούται με $\sum_{k=36}^{40} P(W = k)$, δηλαδή με

$$\sum_{k=36}^{40} \binom{40}{k} p^k (1-p)^{40-k} = p^{40} + 40 p^{39} (1-p) + 780 p^{38} (1-p)^2 + 9880 p^{37} (1-p)^3 + 91390 p^{36} (1-p)^4.$$

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Ο χρόνος αντίδρασης X ενός μεσήλικα οδηγού στον κίνδυνο ατύχηματος ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0.72 δευτερόλεπτα και τυπική απόκλιση 0.11 δευτερόλεπτα. Ποιά είναι η πιθανότητα ο χρόνος αντίδρασης ενός μεσήλικα οδηγού στον κίνδυνο ατυχήματος να είναι μικρότερος από 0.5 δευτερόλεπτα;

Σημείωση: Στην επόμενη σελίδα δίνεται πίνακας τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής για την τυπική κανονική κατανομή.

β) (μον. 14) Οι υποψήφιοι για εισαγωγή σε μια σχολή Ελεγκτών της Εφορίας εξετάζονται στη Λογιστική και στην Αυτοάμυνα. Οι βαθμολογίες των υποψηφίων στη Λογιστική ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 55 και τυπική απόκλιση 8. Οι βαθμολογίες των υποψηφίων στην Αυτοάμυνα ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 40 και τυπική απόκλιση 6. Για να γίνει δεκτός ένας υποψήφιος στη σχολή πρέπει το άθροισμα των βαθμολογιών του στη Λογιστική και στην Αυτοάμυνα να είναι τουλάχιστον 100.

(i) Ποιό είναι το ποσοστό των υποψηφίων που γίνονται δεκτοί στη σχολή;

(ii) Ποιό είναι το ποσοστό των υποψηφίων με καλύτερη επίδοση στην Αυτοάμυνα παρά στη Λογιστική;

Σημείωση: Θεωρείται δεδομένο ότι οι επιδόσεις των υποψηφίων στη Λογιστική είναι ανεξάρτητες από τις επιδόσεις τους στην Αυτοάμυνα.

Λύση της 5ης άσκησης

α) Έστω $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 0.72}{0.11}$. Από τη θεωρία, η Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, επομένως

$$P(X < 0.5) = P\left(\frac{X - 0.72}{0.11} < \frac{0.5 - 0.72}{0.11}\right) = P(Z < -2). \text{ Από τη συμμετρία της τυπικής κανονικής κατανομής,}$$

$$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 2.28\%.$$

β) Έστω X_1 η τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει την επίδοση στην Λογιστική και X_2 η τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφει την επίδοση στην Αυτοάμυνα. Δίνεται ότι η X_1 ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_1 = 55$ και τυπική απόκλιση $\sigma_1 = 8$, ενώ η X_2 ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_2 = 40$ και τυπική απόκλιση $\sigma_2 = 6$. Δίνεται επίσης ότι οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες.

(i) Έστω $Y = X_1 + X_2$. Αφού οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες, η Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 55 + 40 = 95$ και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Επομένως,

$$P(Y \geq 100) = P\left(\frac{Y - 95}{10} \geq \frac{100 - 95}{10}\right) = P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z < 0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 30.85\%.$$

(ii) Έστω $W = X_1 - X_2$. Η τυχαία μεταβλητή $-X_2$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $-\mu_2 = -40$ και τυπική απόκλιση $\sigma_2 = 6$, όπως έπεται από το Θεώρημα 2.2.12 του αρχείου [pi8anothtes2.pdf](#) στο **Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό: Πιθανότητες**. Πράγματι, αν θέσουμε $X = X_2$, $S = T = \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x$ στο παραπάνω θεώρημα, τότε η g είναι προφανώς αντιστρέψιμη με $g^{-1}(y) = -y$ και $\frac{d g^{-1}}{dy}(y) = -1$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής

$$-X_2 \text{ δίνεται από τον τύπο } f_{-X_2}(y) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-y - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} | -1 | = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - (-\mu_2))^2}{2\sigma_2^2}} \text{ για } y \in \mathbb{R}, \text{ ο οποίος είναι ο}$$

τύπος για την πυκνότητα πιθανότητας της κανονικής κατανομής με μέση τιμή $-\mu_2$ και τυπική απόκλιση σ_2 . Επομένως η W , ως άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (των X_1 και $-X_2$) οι οποίες ακολουθούν κανονικές κατανομές, θα ακολουθεί και ή ίδια την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \mu_1 - \mu_2 = 55 - 40 = 15$ και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Εναλλακτικά και ακόμη γενικότερα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η λεγόμενη αναπαραγωγική ιδιότητα της κανονικής κατανομής, ειδική περίπτωση της οποίας είναι αυτή που αποδείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο:

Αναπαραγωγική ιδιότητα της κανονικής κατανομής: Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι πραγματικές σταθερές και $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν κανονικές κατανομές με $E(X_i) = \mu_i$ και $\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε η τυχαία μεταβλητή $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ ακολουθεί επίσης την κανονική κατανομή με μέση τιμή $a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n$ και διασπορά $a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$.

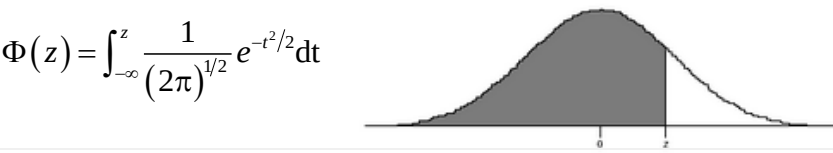
Η κατανομή W του συγκεκριμένου υποερωτήματος περιγράφεται ως ειδική περίπτωση της παραπάνω ιδιότητας για $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. Συμπεραίνουμε επομένως από την αναπαραγωγική ιδιότητα ότι η W ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \mu_1 - \mu_2 = 55 - 40 = 15$ και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Με βάση τα παραπάνω, η ζητούμενη πιθανότητα $P(X_2 > X_1)$ ισούται με $P(W < 0)$, δηλαδή με

$$P\left(\frac{W - 15}{10} < \frac{0 - 15}{10}\right) = P(Z < -1.5) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 6.68\%.$$

Πίνακας Κανονικής Κατανομής

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή (Standardized Normal Distribution Function)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990