

## Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο [study.eap.gr](http://study.eap.gr) έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο [study.eap.gr](http://study.eap.gr). Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou\_ge1\_pli12.doc**».

### ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

|                                                                          |  |
|--------------------------------------------------------------------------|--|
| Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση) |  |
|--------------------------------------------------------------------------|--|

|                  |         |                                                                                     |                       |
|------------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Κωδικός Θ.Ε.     | ΠΛΗ 12  | Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου                                                   |                       |
| Κωδικός Τμήματος |         | <b>Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)</b>                              | 16/05/2018<br>23:59μμ |
| Ακ. Έτος         | 2017-18 | Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή                                           |                       |
| α/α Γ.Ε.         | 6       | Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή; | ΟΧΙ                   |

**Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή:** Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

### ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

|                                            |  |
|--------------------------------------------|--|
| Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή  |  |
| Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή  |  |
| <b>Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)</b> |  |

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

## ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

#### ΕΡΓΑΣΙΑ 6<sup>η</sup>

|                                          |           |                            |
|------------------------------------------|-----------|----------------------------|
| Ημερομηνία ανάρτησης:                    | Πέμπτη    | 19 Απριλίου 2018           |
| Ημερομηνία παράδοσης:                    | Κυριακή   | 13 Μαΐου 2018              |
| Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:        | Τετάρτη   | 16 Μαΐου 2018 <sup>1</sup> |
| Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: | Παρασκευή | 18 Μαΐου 2018              |

Πριν από τη λύση των ασκήσεων να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 6ης εργασίας αναφέρονται στα:

**Κεφάλαιο 2, Ενότητες 2.1 - 2.5** (βασική πιθανοθεωρία)

**Κεφάλαιο 3, Ενότητες 3.1, 3.3.1** (τυχαίες μεταβλητές και χαρακτηριστικά των κατανομών τους)

**Κεφάλαιο 4, Ενότητες 4.1, 4.4 – 4.6** (χρήσιμα πρότυπα κατανομών)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Πιθανότητες και Στατιστική Ι**» του Ι. Κουτρουβέλη.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να μελετηθεί επίσης το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στο [study.eap.gr](http://study.eap.gr):

**Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό: Πιθανότητες**

- Κεφάλαιο Ι,

- Κεφάλαιο ΙΙ.

**Άλλο Εκπαιδευτικό Υλικό: Πιθανότητες**

**Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και κατανόηση των παρακάτω εννοιών και μεθόδων:**

- Βασική πιθανοθεωρία: δειγματοχώροι και ενδεχόμενα, βασικά στοιχεία συνδυαστικής, αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας, δεσμευμένη πιθανότητα, ανεξαρτησία ενδεχομένων, μέθοδοι υπολογισμού πιθανότητας.
- Τυχαίες μεταβλητές: μέση τιμή, διασπορά και τυπική απόκλιση, βασικές ιδιότητες.
- Χρήσιμα πρότυπα κατανομών: δοκιμές Bernoulli, διωνυμική κατανομή, κατανομή Poisson, εκθετική κατανομή, κανονική κατανομή, τυπική κανονική κατανομή.

**Να διαβαστούν προσεκτικά οι εκφωνήσεις και να αιτιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.**

<sup>1</sup> Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης της Γ.Ε.

## Άσκηση 1 (Μον. 20)

- i) (μον. 3) Πόσοι φυσικοί αριθμοί γράφονται στο δεκαδικό σύστημα με δεκαπέντε ψηφία αν υποθέσουμε ότι απαγορεύεται να χρησιμοποιηθούν τα ψηφία 0, 5, 9;
- ii) (μον. 3) Η πρωθυπουργός μιας χώρας έχει καταλήξει σε 40 υποψήφια πρόσωπα για ενδεχόμενη υπουργοποίηση. Αν ο αριθμός των υπουργείων είναι 20, πόσα διαφορετικά υπουργικά σχήματα μπορεί να φτιάξει η πρωθυπουργός, υπό την προϋπόθεση ότι κανένα πρόσωπο δε θα κληθεί να αναλάβει πάνω από ένα υπουργείο;
- iii) (μον. 4) Ένας εργαζόμενος στα διόδια των Μεγάρων καλείται να επιλέξει τις πέντε ημέρες της εβδομάδας στις οποίες θα δουλεύει. Μοναδικός περιορισμός είναι ότι πρέπει να έχει τουλάχιστον μία μέρα ρεπό μέσα στο Σαββατοκύριακο. Πόσες διαφορετικές επιλογές υπάρχουν;
- iv) (μον. 3) Στην αρχή μιας παρτίδας πόκερ, ένας παίκτης λαμβάνει 5 χαρτιά από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει φουλ της ντάμας με βαλέδες, δηλαδή να έχει λάβει 3 ντάμες και 2 βαλέδες;
- v) (μον. 4) Μια παρέα 9 διαβητικών ατόμων επισκέφθηκε μια καφετέρια. 2 άτομα παράγγειλαν ελληνικό καφέ, 3 άτομα παράγγειλαν εσπρέσσο και 4 άτομα παράγγειλαν καπουτσίνο (εννοείται χωρίς ζάχαρη). Ο σερβιτόρος μπερδεύτηκε με την παραγγελία και απλά σέρβιρε με τυχαίο τρόπο τα ροφήματα στα μέλη της παρέας. Ποιά είναι η πιθανότητα να περάσει απαρατήρητο το μπέρδεμα του σερβιτόρου, δηλαδή να σερβιριστεί κάθε μέλος της παρέας με το ρόφημα που παράγγειλε;
- vi) (μον. 3) Θεωρούμε το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία (0,0), (4,0), (4,3), (0,3) του επιπέδου. Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο  $Q$  στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Ποιά είναι η πιθανότητα το σημείο  $Q$  να απέχει απόσταση μεγαλύτερη του 1 από κάθε πλευρά του ορθογωνίου;

## Λύση της 1ης άσκησης

- i) Τα ψηφία του δεκαπενταψηφίου αριθμού είναι διατεταγμένα και επιλέγονται με επανάληψη από το σύνολο  $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ . Επομένως, υπάρχουν  $7^{15}$  τέτοιοι αριθμοί.
- ii) Έστω  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{20}$  τα διαφορετικά υπουργεία. Η πρωθυπουργός έχει 40 επιλογές για την ανάληψη του  $Y_1$ . Από τη στιγμή που θα γίνει η επιλογή για το  $Y_1$  και δεδομένου ότι κανένα πρόσωπο δε θα κληθεί να αναλάβει πάνω από ένα υπουργείο, απομένουν 39 επιλογές για την ανάληψη του  $Y_2$ . Από τη στιγμή που θα γίνει η επιλογή για τα  $Y_1$  και  $Y_2$  και δεδομένου ότι κανένα πρόσωπο δε θα κληθεί να αναλάβει πάνω από ένα υπουργείο, απομένουν 38 επιλογές για την ανάληψη του  $Y_3$ . ... Από τη στιγμή που θα γίνει η επιλογή για τα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{19}$  και δεδομένου ότι κανένα πρόσωπο δε θα κληθεί να αναλάβει πάνω από ένα υπουργείο, απομένουν 21 επιλογές για την ανάληψη του  $Y_{20}$ . Από τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά  $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot \dots \cdot 21$  επιλογές υπουργικών σχημάτων.
- Με διαφορετική διατύπωση, η πρωθυπουργός επιλέγει τυχαία το ένα μετά το άλλο 20 άτομα για υπουργοποίηση και ενδιαφέρεται τόσο για το άτομο που επιλέγει όσο και για τη σειρά που το επιλέγει (διάταξη): το πρώτο άτομο που θα επιλεγεί θα αναλάβει το υπουργείο  $Y_1$ , το δεύτερο άτομο θα αναλάβει το υπουργείο  $Y_2$  κ.ο.κ. Από το Θεώρημα 2.8 στη σελίδα 30 του συγγράμματος «Πιθανότητες και Στατιστική Ι» του Ι. Κουτρουβέλη, ο αριθμός των δυνατών υπουργικών σχημάτων είναι ίσος με τις διατάξεις 40 αντικειμένων ανά 20 (πρόκειται για διατάξεις χωρίς επανατοποθέτηση), άρα υπάρχουν συνολικά

$$P_{40,20} = \frac{40!}{(40-20)!} = \frac{40!}{20!} = 40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 21 \text{ επιλογές υπουργικών σχημάτων.}$$

iii) Υπάρχουν  $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$  διαφορετικοί συνδυασμοί 5 ημερών από τις 7 που έχει η εβδομάδα.

Από αυτούς πρέπει να αφαιρεθούν εκείνοι οι συνδυασμοί που δεν δίνουν τουλάχιστον μία μέρα ρεπό μέσα στο Σαββατοκύριακο. Για να μην υπάρχει ρεπό μέσα στο Σαββατοκύριακο, πρέπει οι 2 από τις 5 ημέρες εργασίας να είναι Σάββατο και Κυριακή, αφήνοντας την επιλογή των υπόλοιπων 3 ημερών εργασίας από το σύνολο {Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή}. Υπάρχουν  $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$  τέτοιοι συνδυασμοί.

Επομένως, ο εργαζόμενος έχει συνολικά  $21 - 10 = 11$  επιλογές.

Εναλλακτικά, ο εργαζόμενος θα εργαστεί είτε 5 από τις 5 καθημερινές και 0 από τις 2 μέρες του Σαββατοκύριακου είτε 4 από τις 5 καθημερινές και 1 από τις 2 μέρες του Σαββατοκύριακου. Επομένως, ο εργαζόμενος έχει συνολικά  $\binom{5}{5}\binom{2}{0} + \binom{5}{4}\binom{2}{1} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11$  επιλογές.

iv) Υπάρχουν  $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$  τρόποι να επιλεγούν 3 ντάμες από τις 4 που έχει η τράπουλα. Επίσης

υπάρχουν  $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$  επιλογές 2 βαλέδων από τους 4 που έχει η τράπουλα. Άρα υπάρχουν  $4 \cdot 6 = 24$

τρόποι σχηματισμού φουλ της ντάμας με βαλέδες. Αφού υπάρχουν  $\binom{52}{5}$  συνδυασμοί 5 χαρτιών από τα 52 που έχει η τράπουλα, έπεται ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με  $\frac{24}{\binom{52}{5}} = \frac{5! \cdot 24}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{1}{108290}$ .

v) Ο σερβιτόρος έκανε μια τυχαία επιλογή 2 ατόμων από τα 9 στα οποία σέρβιρε ελληνικό καφέ, ακολουθούμενη από μια τυχαία επιλογή 3 ατόμων από τα υπόλοιπα 7 στα οποία σέρβιρε εσπρέσσο. Για τα υπόλοιπα 4 μέλη της παρέας δεν υπήρξε καμία επιλογή του σερβιτόρου, καθώς αυτόματα σερβιρίστηκαν με καπουτσίνο. Ο σερβιτόρος είχε επομένως  $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{9 \cdot 8}{2!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 1260$  επιλογές και μόνο μία από αυτές

είναι συμβατή με την παραγγελία που έλαβε. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με  $\frac{1}{1260}$ .

Εναλλακτικά, έστω ότι τα μέλη της παρέας διατάσσονται έτσι ώστε τα δύο πρώτα να έχουν σερβιριστεί με ελληνικό καφέ, τα τρία επόμενα να έχουν σερβιριστεί με εσπρέσσο και τα τέσσερα τελευταία να έχουν σερβιριστεί με καπουτσίνο. Προφανώς υπάρχουν 9! διαφορετικοί τρόποι να σχηματιστεί τέτοια διάταξη από τα μέλη της παρέας. Μια τέτοια διάταξη θα είναι συμβατή με την παραγγελία αν τα δύο πρώτα μέλη όντως είχαν παραγγείλει ελληνικό καφέ (κάτι το οποίο μπορεί να γίνει με 2! τρόπους), τα τρία επόμενα μέλη όντως είχαν παραγγείλει εσπρέσσο (κάτι το οποίο μπορεί να γίνει με 3! τρόπους) και τα τέσσερα τελευταία μέλη όντως είχαν παραγγείλει καπουτσίνο (κάτι το οποίο μπορεί να γίνει με 4! τρόπους). Συνολικά υπάρχουν  $2!3!4!$  διατάξεις οι οποίες είναι συμβατές με την παραγγελία. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με  $\frac{2!3!4!}{9!} = \frac{1}{1260}$ .

vi) Έστω  $R$  το ορθογώνιο με διαδοχικές κορυφές  $B_1 = (0,0)$ ,  $B_2 = (4,0)$ ,  $B_3 = (4,3)$  και  $B_4 = (0,3)$ . Τα σημεία του  $R$  που απέχουν απόσταση μεγαλύτερη του 1 από κάθε πλευρά του  $R$  είναι τα εσωτερικά σημεία του ορθογωνίου  $S$  το οποίο έχει διαδοχικές κορυφές  $C_1 = (1,1)$ ,  $C_2 = (3,1)$ ,  $C_3 = (3,2)$  και  $C_4 = (1,2)$ . Αφού το εμβαδό του  $R$  ισούται με  $4 \cdot 3 = 12$  και το εμβαδό του  $S$  ισούται με  $2 \cdot 1 = 2$ , έπεται ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

## Άσκηση 2 (Μον. 20)

i) (μον. 5) Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό από το σύνολο  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ . Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο και του 4 και του 10; Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 αλλά όχι του 10;

ii) (μον. 6) Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και  $A, B, C$  ανεξάρτητα ενδεχόμενα τέτοια ώστε  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(C) = \frac{1}{4}$ . Να υπολογιστούν οι πιθανότητες  $P(A \cap B')$  και  $P(A \cup (B \cap C))$ .

iii) (μον. 9) Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και  $A, B$  ενδεχόμενα τέτοια ώστε  $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$ . Να αποδειχθεί ότι:

(α)  $P(A|B) \geq \frac{1}{2}$ .

(β) Αν  $P(A|B') = \frac{4}{5}$ , τότε  $P(A|B) = \frac{3}{5}$  και  $P(B'|A) = \frac{2}{5}$ .

### Λύση της 2ης άσκησης

i) Ο δειγματικός χώρος είναι ο  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  και έχει 1000 στοιχεία. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$A$  = «ο αριθμός που επιλέχθηκε είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4»

$B$  = «ο αριθμός που επιλέχθηκε είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 10»

$C$  = «ο αριθμός που επιλέχθηκε είναι ακέραιο πολλαπλάσιο και του 4 και του 10»

$D$  = «ο αριθμός που επιλέχθηκε είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 αλλά όχι του 10».

Παρατηρούμε ότι  $C = A \cap B$  και  $D = A \cap B'$ .

Αφού υπάρχουν ακριβώς 250 ακέραια πολλαπλάσια του 4 στο  $\Omega$ , έπεται ότι  $P(A) = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$ .

Αφού υπάρχουν ακριβώς 100 ακέραια πολλαπλάσια του 10 στο  $\Omega$ , έπεται ότι  $P(B) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$ .

Για να είναι ένας αριθμός ακέραιο πολλαπλάσιο και του 4 και του 10 πρέπει και αρκεί να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 20. Αφού υπάρχουν ακριβώς 50 ακέραια πολλαπλάσια του 20 στο  $\Omega$ , έπεται ότι

$$P(C) = \frac{50}{1000} = \frac{1}{20}.$$

Τέλος, τα ενδεχόμενα  $A \cap B'$  και  $A \cap B$  είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους ισούται με  $A$ . Επομένως,

$$P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A), \text{ δηλαδή } P(D) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(C) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}.$$

ii) Αφού τα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα, έχουμε ότι  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ . Αφού τα  $A \cap B'$  και

$$A \cap B \text{ είναι ασυμβίβαστα με ένωση } A, \text{ συμπεραίνουμε ότι } P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Εναλλακτικά, αφού τα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα έπεται ότι θα είναι ανεξάρτητα και τα  $A$  και  $B'$ : πράγματι,  $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$ , επομένως

$$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Από την ανεξαρτησία των  $A, B, C$ , συνεπάγεται ότι  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$  και

$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ . Άρα, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (γνωστή και ως κανόνας

της πρόσθεσης), προκύπτει ότι  $P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$ .

iii) (α) Αφού  $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$  και  $P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1$ , έπεται από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

ότι  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ . Επομένως,  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ .

(β) Έχουμε  $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ . Αφού  $P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = 3P(A \cap B')$  και  $P(A|B') = \frac{4}{5}$ , έπεται

ότι  $P(A \cap B') = \frac{4}{15}$ . Άρα  $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B') = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$  και  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$ .

Τέλος, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας,  $P(B'|A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}$ .

### Άσκηση 3 (Μον. 20)

i) (μον. 10) Για να διερευνηθεί η αξιοπιστία ενός νέου τεστ για την ανίχνευση μιας ασθένειας στο αίμα, έγιναν δοκιμές σε μεγάλο αριθμό εθελοντών και προέκυψαν τα εξής στατιστικά δεδομένα:

- Ο αριθμός των εθελοντών για τους οποίους το τεστ βγήκε θετικό ήταν το 5% του συνολικού αριθμού των εθελοντών.
- Ο αριθμός των εθελοντών για τους οποίους το τεστ βγήκε θετικό και είχαν την ασθένεια ήταν το 0.5% του συνολικού αριθμού των εθελοντών.
- Ο αριθμός των εθελοντών για τους οποίους το τεστ βγήκε αρνητικό και είχαν την ασθένεια ήταν το 0.01% του συνολικού αριθμού των εθελοντών.

Να αποδειχθεί ότι:

(α) Το τεστ είναι τουλάχιστον κατά 98% αξιόπιστο για τους νοσούντες εθελοντές.

(β) Το τεστ είναι τουλάχιστον κατά 95% αξιόπιστο για το σύνολο των εθελοντών.

(γ) Όταν βγαίνει θετικό, το τεστ είναι κατά 90% αναξιόπιστο!

ii) (μον. 10) Σύμφωνα με πρόσφατη έρευνα, το ένα τρίτο των συμβολαίων αγοράς κατοικίας τα οποία υπογράφηκαν στις ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του ημερολογιακού έτους 2017 αφορούσαν κατοικίες που δεν είχαν ακόμη κατασκευαστεί. Να χρησιμοποιηθούν κατάλληλες διωνυμικές κατανομές για να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

(α) Αν επιλέξουμε τυχαία 6 συμβόλαια αγοράς κατοικίας τα οποία υπογράφηκαν στις ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του ημερολογιακού έτους 2017, ποιά είναι η πιθανότητα ακριβώς 2 από αυτά να αφορούν κατοικίες οι οποίες δεν είχαν ακόμα κατασκευαστεί;

(β) Αν επιλέξουμε τυχαία 60 συμβόλαια αγοράς κατοικίας τα οποία υπογράφηκαν στις ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του ημερολογιακού έτους 2017, ποιά είναι η πιθανότητα το πολύ 58 από αυτά να αφορούν κατοικίες οι οποίες είχαν ήδη κατασκευαστεί;

γ) Επιλέγουμε τυχαία 900 συμβόλαια αγοράς κατοικίας τα οποία υπογράφηκαν στις ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του ημερολογιακού έτους 2017. Έστω  $X$  ο αριθμός των συμβολαίων αυτών τα οποία αφορούν κατοικίες που δεν είχαν ακόμη κατασκευαστεί. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

### Λύση της 3ης άσκησης

i) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$\Theta$  = «το τεστ βγήκε θετικό για τον εθελοντή»

$A$  = «ο εθελοντής είχε την ασθένεια».

Από τα δεδομένα, έχουμε ότι  $P(\Theta) = \frac{5}{100}$ ,  $P(\Theta \cap A) = \frac{5}{1000}$ ,  $P(\Theta' \cap A) = \frac{1}{10000}$ .

(α) Τα ενδεχόμενα  $\Theta \cap A$  και  $\Theta' \cap A$  είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους ισούται με  $A$ . Επομένως,  
 $P(A) = P(\Theta \cap A) + P(\Theta' \cap A) = \frac{5}{1000} + \frac{1}{10000} = \frac{51}{10000}$ . Άρα  $P(\Theta | A) = \frac{P(\Theta \cap A)}{P(A)} = \frac{5/1000}{51/10000} = \frac{50}{51} > 0.98$ ,

δηλαδή το τεστ είναι τουλάχιστον κατά 98% αξιόπιστο για τους νοσούντες εθελοντές.

(β) Το τεστ είναι αξιόπιστο στον βαθμό που κάνει σωστή διάγνωση, δηλαδή όποτε είτε ο εθελοντής νοσεί και το τεστ βγαίνει θετικό είτε ο εθελοντής δεν νοσεί και το τεστ βγαίνει αρνητικό. Πρέπει επομένως να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P((\Theta \cap A) \cup (\Theta' \cap A'))$ . Τα ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  είναι ασυμβίβαστα (ως συμπληρωματικά), άρα και τα ενδεχόμενα  $\Theta \cap A$  και  $\Theta' \cap A'$  είναι ασυμβίβαστα. Επομένως,

$P((\Theta \cap A) \cup (\Theta' \cap A')) = P(\Theta \cap A) + P(\Theta' \cap A')$ . Όμως

$P(\Theta' \cap A') = P((\Theta \cup A)') = 1 - P(\Theta \cup A) = 1 - P(\Theta) - P(A) + P(\Theta \cap A)$ . Άρα

$P((\Theta \cap A) \cup (\Theta' \cap A')) = 1 - P(\Theta) - P(A) + 2P(\Theta \cap A) = 1 - \frac{5}{100} - \frac{51}{10000} + \frac{1}{100} = \frac{9549}{10000} > 0.95$ , δηλαδή το

τεστ είναι τουλάχιστον κατά 95% αξιόπιστο για το σύνολο των εθελοντών.

(γ) Αφού τα ενδεχόμενα  $A' \cap \Theta$  και  $A \cap \Theta$  είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους ισούται με  $\Theta$ , έπεται ότι

$P(A' \cap \Theta) = P(\Theta) - P(A \cap \Theta) = \frac{5}{100} - \frac{5}{1000} = \frac{9}{200}$ . Άρα,  $P(A' | \Theta) = \frac{P(A' \cap \Theta)}{P(\Theta)} = \frac{\frac{9}{200}}{\frac{5}{100}} = \frac{9}{10}$ , δηλαδή το

τεστ είναι κατά 90% αναξιόπιστο όταν βγαίνει θετικό (αφού στο 90% των περιπτώσεων στις οποίες το τεστ βγήκε θετικό ο εθελοντής δεν είχε την ασθένεια).

ii) Από τα δεδομένα, κάθε τυχαία επιλογή συμβολαίου αγοράς κατοικίας είναι δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $p = \frac{1}{3}$ , όπου το αποτέλεσμα της δοκιμής θεωρείται επιτυχία όταν το αντίστοιχο συμβόλαιο αφορούσε κατοικία η οποία δεν είχε ακόμα κατασκευαστεί.

(α) Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή  $X_1$  η οποία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή  $B(6, p)$  και περιγράφει τον αριθμό των επιλεγέντων συμβολαίων ανάμεσα στα 6 τα οποία αφορούν κατοικίες οι οποίες δεν έχουν ακόμα κατασκευαστεί. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(X_1 = 2) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^4}{3^4} = \frac{80}{243}.$$

(β) Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή  $X_2$  η οποία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή  $B(60, p)$  και περιγράφει τον αριθμό των επιλεγέντων συμβολαίων ανάμεσα στα 60 τα οποία αφορούν κατοικίες οι οποίες έχουν ήδη κατασκευαστεί. Το ενδεχόμενο «το πολύ 58 από τα συμβόλαια αφορούν κατοικίες οι οποίες έχουν ήδη κατασκευαστεί» εκφράζεται και ως «τουλάχιστον 2 από τα συμβόλαια αφορούν κατοικίες οι οποίες δεν έχουν ακόμα κατασκευαστεί». Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(X_2 \geq 2) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) = 1 - \binom{60}{0} p^0 (1-p)^{60} - \binom{60}{1} p^1 (1-p)^{59} = 1 - \frac{2^{60}}{3^{60}} - 20 \frac{2^{59}}{3^{59}} = 1 - \frac{2^{60} \cdot 31}{3^{60}}.$$

(γ) Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή  $X_3$  η οποία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή  $B(900, p)$  και περιγράφει τον αριθμό των επιλεγέντων συμβολαίων ανάμεσα στα 900 τα οποία αφορούν

κατοικίες οι οποίες δεν έχουν ακόμα κατασκευαστεί.. Από τη θεωρία, έπεται ότι  $E(X_3) = 900p = 300$  και  $\sigma_{X_3} = \sqrt{\text{var}(X_3)} = \sqrt{900p(1-p)} = \sqrt{200}$ .

#### Άσκηση 4 (Μον. 20)

i) (μον. 8) Ο αριθμός  $X$  των τυπογραφικών λαθών ανά τυχαία σελίδα κειμένου ακολουθεί την κατανομή Poisson με διασπορά  $\text{var}(X) = 9$ .

(α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

(β) Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθούν τουλάχιστον τρία τυπογραφικά λάθη σε τυχαία σελίδα κειμένου;

ii) (μον. 12) Έστω  $Y$  τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ . Δίνεται ότι  $\text{var}(Y) = 4$ .

(α) Να υπολογιστεί το  $\lambda$  και η μέση τιμή της  $Y$ .

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(Y > 2)$ .

(γ) Έστω  $c$  θετική σταθερά. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα  $P(Y > c + 2 \mid Y > c)$ .

#### Λύση της 4ης άσκησης

i) (α) Έστω  $\lambda$  η παράμετρος της συγκεκριμένης κατανομής Poisson. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι  $E(X) = \text{var}(X) = \lambda$ . Επομένως  $\lambda = 9$ ,  $E(X) = 9$  και  $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)} = 3$ .

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-9} - 9e^{-9} - \frac{9^2}{2!}e^{-9} = 1 - \frac{101}{2e^9}.$$

ii) (α) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι  $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$  και  $\text{var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$ . Επομένως,  $\lambda = \frac{1}{2}$  και  $E(Y) = 2$ .

(β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$  ισούται με  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ , για  $x > 0$ . Επομένως,  $P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e}$ .

(γ) Για κάθε  $a > 0$ , έχουμε  $P(Y > a) = 1 - P(Y \leq a) = 1 - \int_0^a \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = 1 - \left( e^{-\frac{1}{2}x} \right) \Big|_0^a = 1 + e^{-\frac{a}{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e^a}}$ .

$$\text{Επομένως, } P(Y > c + 2 \mid Y > c) = \frac{P(Y > c + 2 \text{ και } Y > c)}{P(Y > c)} = \frac{P(Y > c + 2)}{P(Y > c)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e^{c+2}}}}{\frac{1}{\sqrt{e^c}}} = \frac{1}{e}.$$

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να επικαλεστεί άμεσα την λεγόμενη ιδιότητα της αμνησίας για την εκθετική κατανομή, η οποία αποτυπώνεται με τον τύπο (4.20) στη σελίδα 127 του συγγράμματος «Πιθανότητες και Στατιστική Ι» του Ι. Κουτρουβέλη, με βάση την οποία προκύπτει ότι  $P(Y > c + 2 \mid Y > c) = P(Y > 2) = \frac{1}{e}$ .

**Άσκηση 5 (Μον. 20)**

i) (μον. 10) Έστω  $c$  πραγματική σταθερά και  $Y$  συνεχής τυχαία μεταβλητή (με συνεχή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) της οποίας η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2, & \text{αν } -1 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ c, & \text{αν } 1 < x \end{cases}.$$

(α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς  $c$ .

(β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$ .

(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της  $Y$ .

ii) (μον. 10) Δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $X_1$  και  $X_2$  ακολουθούν την κανονική κατανομή με παραμέτρους  $\mu_1 = 100$ ,  $\sigma_1^2 = 25$  και  $\mu_2 = 300$ ,  $\sigma_2^2 = 144$ , αντίστοιχα.

(α) Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή  $X = X_1 + X_2$ . Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της  $X$ . Ποιά κατανομή ακολουθεί η  $X$ ;

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(413 < X \leq 426)$ .

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(X_1 \geq 387 - X_2)$ .

**Σημείωση:** Στην επόμενη σελίδα δίνεται πίνακας τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής για την τυπική κανονική κατανομή.

**Λύση της 5ης άσκησης**

i) (α) Αφού η  $F$  είναι αθροιστική συνάρτηση κατανομής, πρέπει να ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ , δηλαδή  $c = 1$ .

(β) Έστω  $f$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$ . Αφού η  $f$  είναι συνεχής, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού δίνει  $f(x) = F'(x)$ , για κάθε  $x$ . Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε την παράγωγο της  $F$ . Για  $x < -1$  έχουμε  $f(x) = F'(x) = 0$ , για  $-1 < x < 0$  έχουμε  $f(x) = F'(x) = x+1$ , για  $0 < x < 1$  έχουμε  $f(x) = F'(x) = 1-x$  και για  $1 < x$  έχουμε  $f(x) = F'(x) = 0$ . Μένει να υπολογιστούν οι τιμές  $f(-1)$ ,  $f(0)$  και  $f(1)$ .

Από τη συνέχεια της  $f$ , έπεται ότι  $f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 0 = 0$ ,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$  και

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0. \text{ Επομένως η } f \text{ δίνεται από τον τύπο } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq -1 \\ x+1, & \text{αν } -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } 1 < x \end{cases}.$$

Εναλλακτικά, οι τιμές  $f(-1)$ ,  $f(0)$  και  $f(1)$  μπορούν να βρεθούν με υπολογισμό της παραγώγου της  $F$  στα σημεία  $x_0 = -1$ ,  $x_0 = 0$  και  $x_0 = 1$ , ως εξής:

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{F(x) - F(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{0 - 0}{x + 1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{F(x) - F(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\frac{1}{2}(x+1)^2 - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{2}(x+1) = 0,$$

$$\text{έπεται ότι } f(-1) = F'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x) - F(-1)}{x + 1} = 0.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}(x+2) = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(2-x) = 1, \text{ έπεται ότι } f(0) = F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 1.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}(1-x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-1}{x-1} = 0, \text{ έπεται ότι}$$

$$f(1) = F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 0.$$

$$(\gamma) \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0.$$

Εναλλακτικά, επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι προφανώς άρτια, το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 x f(x) dx$  που υπολογίζει την μέση τιμή της  $Y$  είναι ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε διάστημα συμμετρικό γύρω από το σημείο  $c = 0$  και άρα έπεται ότι  $E(Y) = 0$ .

ii) (α) Έστω  $\mu$  η μέση τιμή της  $X$  και  $\sigma^2$  η διασπορά της  $X$ . Από τη θεωρία (λόγω της ανεξαρτησίας και της κανονικής κατανομής των  $X_1$  και  $X_2$ ), έπεται ότι η  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με  $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 100 + 300 = 400$  και  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ .

(β) Έστω  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 400}{13}$ . Από τη θεωρία, η  $Z$  ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή και

$$P(413 < X \leq 426) = P\left(1 < \frac{X - 400}{13} \leq 2\right) = P(1 < Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

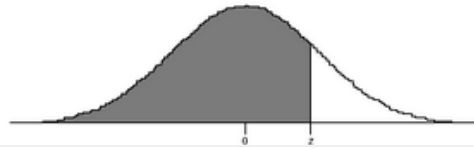
Ο πίνακας τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής για την τυπική κανονική κατανομή δίνει  $P(413 < X \leq 426) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359 = 13.59\%$ .

(γ)  $P(X_1 \geq 387 - X_2) = P(X_1 + X_2 \geq 387) = P\left(\frac{X - 400}{13} \geq -1\right) = P(Z \geq -1)$ . Από τη συμμετρία της τυπικής κανονικής κατανομής, έχουμε ότι  $P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413 = 84.13\%$ .

# Πίνακας Κανονικής Κατανομής

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή (Standardized Normal Distribution Function)

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-t^2/2} dt$$



| z   | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| .0  | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| .1  | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| .2  | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| .3  | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| .4  | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| .5  | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| .6  | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| .7  | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| .8  | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| .9  | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |