

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

Άσκηση 1 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α) (μον. 4) $\int (x^3 + 5)^{200} x^2 dx$

β) (μον. 4) $\int \frac{e^x}{(1+e^x) \ln(1+e^x)} dx$

γ) (μον. 4) $\int x^3 e^{x^2} dx$

δ) (μον. 4) $\int x^2 \arctan(x) dx$

ε) (μον. 4) $\int \frac{8x^2 - 16x + 12}{x^2(x-2)} dx$

Λύση της 1ης άσκησης

α) Θέτοντας $u = x^3 + 5$, έχουμε $du = 3x^2 dx$, άρα το αόριστο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\frac{1}{3} \int u^{200} du = \frac{u^{201}}{603} + C = \frac{(x^3 + 5)^{201}}{603} + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

β) Θέτοντας $u = \ln(1+e^x)$, έχουμε $du = \frac{e^x}{1+e^x} dx$, άρα το αόριστο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά. Αφού } 1+e^x > 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ έχουμε ότι } u > 0. \text{ Επομένως,}$$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x) \ln(1+e^x)} dx = \ln(\ln(1+e^x)) + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

Εναλλακτικά, θέτοντας $u = 1+e^x$, έχουμε $du = e^x dx$, άρα το αόριστο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int \frac{1}{u \ln u} du = \int \frac{(\ln u)'}{\ln u} du = \ln|\ln u| + C = \ln|\ln(e^x + 1)| + C = \ln(\ln(e^x + 1)) + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

γ) Θέτοντας $u = x^2$, έχουμε $du = 2x dx$, άρα το αόριστο ολοκλήρωμα ισούται με $\frac{1}{2} \int u e^u du$. Επομένως, με

παραγοντική ολοκλήρωση, το αόριστο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\frac{1}{2} \int u (e^u)' du = \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} \int e^u (u)' du = \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

δ) Με παραγοντική ολοκλήρωση, έχουμε ότι

$$\int x^2 \arctan(x) dx = \frac{1}{3} \int \arctan(x) (x^3)' dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx. \text{ Θέτοντας } u = x^2, \text{ έχουμε } du = 2x dx,$$

άρα

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{u}{1+u} du = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = \frac{1}{2} \int du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{2}(u - \ln|1+u|) + C = \frac{1}{2}(x^2 - \ln(1+x^2)) + C,$$

όπου C σταθερά. Επομένως, $\int x^2 \arctan(x) dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan(x) - \frac{1}{6} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C$, όπου C σταθερά.

Εναλλακτικά, για τον υπολογισμό του $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\text{Αφού } \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}, \text{ έπεται ότι } \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int x dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C, \text{ άρα}$$

$$\int x^2 \arctan(x) dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan(x) - \frac{1}{6} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

ε) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των απλών κλασμάτων, αναζητούμε σταθερές a, b, c για τις οποίες ισχύει

$$\text{ότι } \frac{8x^2 - 16x + 12}{x^2(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-2} = \frac{ax(x-2) + b(x-2) + cx^2}{x^2(x-2)}. \text{ Πρέπει επομένως να ισχύει η ισότητα}$$

πολυωνύμων $(a+c)x^2 + (b-2a)x - 2b = 8x^2 - 16x + 12$. Συγκρίνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των δυνάμεων του x στα δύο μέλη της ισότητας αυτής παίρνουμε το σύστημα $a+c=8, 2a-b=16, 2b=-12$, το οποίο δίνει $a=5, b=-6, c=3$. Άρα το αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int \left(\frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \int \frac{dx}{x} - 6 \int \frac{dx}{x^2} + 3 \int \frac{dx}{x-2} = 5 \ln|x| + \frac{6}{x} + 3 \ln|x-2| + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 7) Να υπολογιστεί το εμβαδό του κλειστού φραγμένου χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τύπους $f_1(x) = x^2 - 2$ και $f_2(x) = 7$.

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τα σημεία τομής και τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f_1 και f_2 .

β) (μον. 7) Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης που δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 2)^3}$ στο διάστημα $[2, 4]$.

γ) (μον. 6) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των x της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{\cos^7(x) \sin(x)}$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Λύση της 2ης άσκησης

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση $f_1(x) = f_2(x)$, δηλαδή την $x^2 - 2 = 7$, η οποία έχει λύσεις τις $x = -3$ και $x = 3$. Για $x \in [-3, 3]$, έχουμε $x^2 \leq 9$, δηλαδή $f_1(x) \leq f_2(x)$. Άρα η γραφική παράσταση της f_2 βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f_1 στο διάστημα $[-3, 3]$. Επομένως το κλειστό φραγμένο χωρίο μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων είναι αυτό που βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 7$ και πάνω από την παραβολή $y = x^2 - 2$ στο διάστημα

$$[-3, 3]. \text{ Άρα το ζητούμενο εμβαδό ισούται με } \int_{-3}^3 (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 36.$$

β) Αφού $g'(x) = x\sqrt{x^2 - 2}$, το ζητούμενο μήκος ισούται με

$$\int_2^4 \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx = \int_2^4 \sqrt{1 + x^2(x^2 - 2)} dx = \int_2^4 \sqrt{(x^2 - 1)^2} dx = \int_2^4 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_2^4 = \frac{50}{3}.$$

γ) Ο ζητούμενος όγκος ισούται με $\pi \int_0^{\pi/2} h(x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^7(x) \sin(x) dx$. Θέτοντας $u = \cos(x)$, έχουμε

$$du = -\sin(x) dx, \text{ άρα ο όγκος ισούται με } -\pi \int_1^0 u^7 du = \frac{\pi}{8} (u^8) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 5) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^5} dx$.

β) (μον. 5) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{6+}^{22} \frac{1}{\sqrt[4]{x-6}} dx$.

γ) (μον. 10) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

(i) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x^8+1}} dx$

(ii) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Λύση της 3ης άσκησης

α) Για $b > 0$ έχουμε $\int_0^b \frac{1}{(x+1)^5} dx = -\frac{1}{4(x+1)^4} \Big|_0^b = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(b+1)^4}$. Επομένως,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^5} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+1)^5} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4(b+1)^4} \right) = \frac{1}{4}.$$

β) Θέτοντας $u = x-6$, έχουμε $du = dx$. Επομένως, για $a > 6$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^{22} \frac{1}{\sqrt[4]{x-6}} dx = \int_{a-6}^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{u}} du = \frac{4}{3} \sqrt[4]{u^3} \Big|_{a-6}^{16} = \frac{4}{3} (8 - \sqrt[4]{(a-6)^3}). \text{ Άρα}$$

$$\int_{6+}^{22} \frac{1}{\sqrt[4]{x-6}} dx = \lim_{a \rightarrow 6+} \int_a^{22} \frac{1}{\sqrt[4]{x-6}} dx = \lim_{a \rightarrow 6+} \frac{4}{3} (8 - \sqrt[4]{(a-6)^3}) = \frac{32}{3}.$$

γ)

(i) Έχουμε $\frac{3x^2}{\sqrt{x^8+1}} < \frac{3x^2}{x^4} = \frac{3}{x^2}$, για κάθε $x > 1$. Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει

(από το παράδειγμα στη σελίδα 162 του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ.

Δάσιου), έπεται ότι και το $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x^8+1}} dx$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης.

Εναλλακτικά, έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x^8+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^8+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^8}}} = 1$. Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx$ συγκλίνει, έπεται, από το οριακό κριτήριο λόγου για γενικευμένα ολοκληρώματα, ότι και το

$\int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x^8+1}} dx$ συγκλίνει.

(ii) Έχουμε $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$, για κάθε $x > e$. Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνει (από το παράδειγμα στη σελίδα 162 του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου), έπεται ότι και το $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης. Αφού το $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ είναι πραγματικός αριθμός (λόγω της συνέχειας της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης στο διάστημα $[1, e]$), έπεται ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνει.

Εναλλακτικά, για $x \geq 1$, έχουμε $\ln x \geq 0$ και $x \geq \sqrt{x}$, επομένως $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Όμως

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b (\ln x) (\ln x)' dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(\ln b)^2}{2} = +\infty, \text{ δηλαδή το γενικευμένο}$$

ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ αποκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης, έπεται ότι αποκλίνει και το $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 8) Να εξηγηθεί γιατί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{t^2} dt$ αποκλίνει και να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt, \text{ αν υπάρχει.}$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\cos(x^3) - 1}{x}$ στο διάστημα $[1, 2]$.

(i) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της συνάρτησης συνημιτόνου, να εκφραστεί η f ως δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο $x_0 = 0$.

(ii) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας τη δυναμοσειρά που βρέθηκε στο προηγούμενο υποερώτημα και θεωρώντας δεδομένο ότι επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε την δυναμοσειρά όρο-προς-όρο, να αποδειχθεί ότι

$$\int_1^2 \frac{\cos(x^3) - 1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{64^n - 1}{(2n)!(6n)}.$$

Λύση της 4ης άσκησης

α) Αφού $t^2 \geq 0$ και η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα, έπεται ότι $e^{t^2} \geq e^0 = 1$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} 1 dt$ αποκλίνει (στο ∞), έπεται, από το κριτήριο σύγκρισης, ότι το ίδιο ισχύει

και για το $\int_0^{+\infty} e^{t^2} dt$. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$ είναι επομένως απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, άρα, από

τον κανόνα L'Hôpital και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού, ισούται με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$.

β)

(i) Αντικαθιστώντας το x με x^3 στη σειρά Maclaurin της συνάρτησης συνημιτόνου η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!}, \text{ άρα } \frac{\cos(x^3) - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n-1}}{(2n)!}.$$

(ii) Θεωρώντας δεδομένο ότι επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε την δυναμοσειρά όρο-προς-όρο, έπεται ότι

$$\int_1^2 \frac{\cos(x^3)-1}{x} dx = \int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_1^2 x^{6n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{x^{6n}}{6n} \right) \Big|_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{64^n - 1}{(2n)!(6n)}.$$

Άσκηση 5 (Μον. 20) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } -\pi < x \leq 0 \\ 6, & \text{αν } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x+2\pi) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) (μον. 2) Να υπολογιστεί το $f(-\pi)$.

β) (μον. 12) Να υπολογιστεί η σειρά Fourier της f .

γ) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της f , να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Λύση της 5ης άσκησης

α) Η περιοδικότητα της f δίνει $f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi) = 6$.

β) Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier F της f :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 6 dx = 4. \text{ Όμοια, για } n \geq 1, \text{ έχουμε ότι}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2 \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 6 \cos(nx) dx = \left(\frac{2 \sin(nx)}{n\pi} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(\frac{6 \sin(nx)}{n\pi} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \text{ και}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2 \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 6 \sin(nx) dx = \left(-\frac{2 \cos(nx)}{n\pi} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(-\frac{6 \cos(nx)}{n\pi} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{6(-1)^n}{n\pi} + \frac{6}{n\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n\pi},$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\cos(n\pi) = (-1)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα η F δίνεται από τον τύπο $F(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin(nx) = 4 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$, διότι ισχύει ότι

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n=2k, \text{ με } k \in \mathbb{N} \\ 2, & \text{αν } n=2k+1, \text{ με } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

γ) Η f είναι περιοδική με περίοδο 2π , οι f και f' είναι προφανώς τμηματικά συνεχείς στο $[-\pi, \pi]$ και

η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Επομένως, από τη θεωρία, συμπεραίνουμε ότι $F(x_0) = f(x_0)$. Αφού

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \text{ και } \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k, \text{ για κάθε } k, \text{ έπεται ότι } 6 = 4 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \text{ άρα } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$