

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	18/04/2018 23:59μμ
Ακ. Έτος	2017-18	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	5	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η

Ημερομηνία ανάρτησης:	Πέμπτη	15 Μαρτίου 2018
Ημερομηνία παράδοσης:	Κυριακή	15 Απριλίου 2018
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	18 Απριλίου 2018 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Παρασκευή	20 Απριλίου 2018

Πριν από τη λύση των ασκήσεων να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 5ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 9 (το ολοκλήρωμα)

Ενότητα 10 (γενικευμένη ολοκλήρωση)

Ενότητα 11 (εφαρμογές των ολοκληρωμάτων)

Ενότητα 12 (σειρές Fourier)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να μελετηθεί επίσης το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στο study.eap.gr:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός

- ολοκληρώματα 1,
- ολοκληρώματα 2,
- σειρές Fourier.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και κατανόηση των παρακάτω εννοιών και μεθόδων:

- Ολοκληρώματα: ορισμένο ολοκλήρωμα, γενικές ιδιότητες, αόριστο ολοκλήρωμα, βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης, Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.
- Γενικευμένα ολοκληρώματα: είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων, κριτήρια σύγκλισης.
- Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων: εμβαδά χωρίων, όγκοι στερεών, μήκη επίπεδων καμπυλών, επιφάνειες και στερεά εκ περιστροφής.
- Σειρές Fourier: περιοδικότητα, υπολογισμός συντελεστών Fourier, σύγκλιση σειρών Fourier.

Να διαβαστούν προσεκτικά οι εκφωνήσεις και να αιτιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης της Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

- i) (μον. 4) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$
- ii) (μον. 4) $\int x^2 \sqrt{x-1} dx$
- iii) (μον. 4) $\int e^{\sqrt{x}} dx$
- iv) (μον. 4) $\int x^5 \ln x dx$
- v) (μον. 4) $\int \frac{3x^2 + x + 2}{x^2(x^2 + 1)} dx$

Λύση της 1ης άσκησης

i) Θέτοντας $u = \tan x$, έχουμε $du = \frac{1}{\cos^2 x} dx$, άρα το ολοκλήρωμα ισούται με $\int e^u du = e^u + C = e^{\tan x} + C$, όπου C σταθερά.

ii) Θέτοντας $u = x-1$, έχουμε $du = dx$ και $x = u+1$, άρα το ολοκλήρωμα ισούται με $\int (u+1)^2 \sqrt{u} du = \int (u^2 \sqrt{u} + 2u \sqrt{u} + \sqrt{u}) du = \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} (x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C$, όπου C σταθερά.

Εναλλακτικά, θέτοντας $u = \sqrt{x-1}$, έχουμε $u^2 = x-1$ οπότε $dx = 2u du$, άρα το ολοκλήρωμα ισούται με $2 \int (u^2 + 1)^2 u^2 du = 2 \int (u^6 + 2u^4 + u^2) du = \frac{2u^7}{7} + \frac{4u^5}{5} + \frac{2u^3}{3} + C = \frac{2}{7} (x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C$, όπου C σταθερά.

iii) Θέτοντας $u = \sqrt{x}$, έχουμε $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2u} dx$, άρα το ολοκλήρωμα ισούται με $2 \int u e^u du$. Με παραγοντική ολοκλήρωση, έπεται ότι $2 \int u e^u du = 2 \int u (e^u)' du = 2u e^u - 2 \int e^u (u)' du = 2u e^u - 2 \int e^u du = 2u e^u - 2e^u + C = 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$, όπου C σταθερά.

iv) Με παραγοντική ολοκλήρωση, $\int x^5 \ln x dx = \frac{1}{6} \int (x^6)' \ln x dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x} x^6 dx = \frac{x^6 \ln x}{6} - \frac{x^6}{36} + C$, όπου C σταθερά.

v) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των απλών κλασμάτων, δηλαδή αναζητούμε σταθερές a, b, c, d για τις οποίες ισχύει ότι $\frac{3x^2 + x + 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1} = \frac{ax(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) + x^2(cx + d)}{x^2(x^2 + 1)}$. Επομένως, πρέπει να ισχύει η ισότητα πολωνύμων $(a+c)x^3 + (b+d)x^2 + ax + b = 3x^2 + x + 2$. Συγκρίνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των δυνάμεων του x στα δύο μέλη της ισότητας αυτής παίρνουμε το σύστημα $a+c=0, b+d=3, a=1$ και $b=2$, το οποίο δίνει $a=1, b=2, c=-1, d=1$. Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα ισούται με

$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln |x| - \frac{2}{x} - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + \arctan(x) + C$, όπου C σταθερά.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

i) (μον. 7) Να υπολογιστεί το εμβαδό του κλειστού φραγμένου χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τύπους $f_1(x) = 3x$ και $f_2(x) = x^2 + 2$.

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τα σημεία τομής και τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f_1 και f_2 .

ii) (μον. 7) Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης που δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ στο διάστημα $[3, 8]$.

iii) (μον. 6) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή γύρω από των άξονα των x της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{16 - 3x^2}$ στο διάστημα $[1, 2]$.

Λύση της 2ης άσκησης

i) Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση $f_1(x) = f_2(x)$ δηλαδή $x^2 - 3x + 2 = 0$, η οποία είναι δευτεροβάθμια με λύσεις $x = 1$ και $x = 2$. Για $x \in [1, 2]$ έχουμε $f_1(x) - f_2(x) = 3x - x^2 - 2 = (x - 1)(2 - x) \geq 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f_1 βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f_2 στο διάστημα $[1, 2]$ και επομένως το κλειστό φραγμένο χωρίο που περικλείεται μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων είναι αυτό που βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 3x$ και πάνω από την παραβολή $y = x^2 + 2$ στο διάστημα $[1, 2]$. Άρα το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$\int_1^2 (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_1^2 (3x - x^2 - 2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_1^2 = \left(6 - \frac{8}{3} - 4 \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{1}{6}.$$

ii) Αφού $g'(x) = \sqrt{x}$, το ζητούμενο μήκος ισούται με $\int_3^8 \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx = \int_3^8 \sqrt{1 + x} dx$. Θέτοντας $u = x + 1$,

$$\text{έχουμε } du = dx, \text{ άρα } \int_3^8 \sqrt{1 + x} dx = \int_4^9 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3}.$$

iii) Ο ζητούμενος όγκος ισούται με

$$\pi \int_1^2 h(x)^2 dx = \pi \int_1^2 (16 - 3x^2) dx = \pi (16x - x^3) \Big|_1^2 = \pi ((32 - 8) - (16 - 1)) = 9\pi.$$

Άσκηση 3 (Μον. 20) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sin(x^2)$ στο $(-\infty, \infty)$.

i) (μον. 4) Έστω F η λεγόμενη συνάρτηση Fresnel με τύπο $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$. Να εξηγηθεί γιατί ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Υπόδειξη: Δεν είναι καλή ιδέα να επιχειρηθεί ο υπολογισμός του ολοκληρώματος).

ii) (μον. 4) Να αποδειχθεί ότι $|F(x) - F(y)| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

iii) (μον. 4) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της συνάρτησης ημιτόνου, να εκφραστεί η f ως δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο $x_0 = 0$.

iv) (μον. 4) Χρησιμοποιώντας την δυναμοσειρά που βρέθηκε στο προηγούμενο υποερώτημα και θεωρώντας δεδομένο ότι επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε την δυναμοσειρά όρο-προς-όρο, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)}.$$

ν) (μον. 4) Να βρεθεί ένα μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)}$ το οποίο να προσεγγίζει την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Λύση της 3ης άσκησης

i) Η συνάρτηση f είναι παντού συνεχής, επομένως από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού, έπεται ότι

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sin(t^2) dt \right) = \sin(x^2) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \leq x$ (αν $x \leq y$, τότε αποδεικνύεται ανάλογα ότι $|F(y) - F(x)| \leq |y - x|$, δηλαδή $|F(x) - F(y)| \leq |x - y|$).

$$\text{Τώρα } |F(x) - F(y)| = \left| \int_0^x \sin(t^2) dt - \int_0^y \sin(t^2) dt \right| = \left| \int_y^x \sin(t^2) dt \right|. \text{ Αφού } -1 \leq \sin(t^2) \leq 1, \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}, \text{ έχουμε}$$

$$-\int_y^x 1 dt \leq \int_y^x \sin(t^2) dt \leq \int_y^x 1 dt, \text{ άρα } -(x-y) \leq \int_y^x \sin(t^2) dt \leq (x-y). \text{ Επομένως, } \left| \int_y^x \sin(t^2) dt \right| \leq x-y = |x-y|.$$

Εναλλακτικά, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για ολοκληρώματα, υπάρχει κάποιο $z \in [y, x]$ τέτοιο ώστε

$$\int_y^x \sin(t^2) dt = \sin(z^2)(x-y). \text{ Άρα } |F(x) - F(y)| = |\sin(z^2)(x-y)| = |\sin(z^2)| |x-y| \leq 1 |x-y| = |x-y|.$$

iii) Αφού $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $f(x) = \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{iv) } \int_0^1 \sin(x^2) dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{4n+2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \Big|_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}. \end{aligned}$$

ν) Έστω $a_n = \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)}$. Από το προηγούμενο υποερώτημα, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ ισούται με

$$\text{την εναλλάσσουσα σειρά } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n. \text{ Αφού } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ και } a_n = \frac{1}{(2n+1)!(4n+3)} \geq \frac{1}{(2n+3)!(4n+7)} = a_{n+1},$$

για κάθε n , ισχύουν για την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ οι συνθήκες του Θεωρήματος Leibniz. Άρα

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1}, \text{ για κάθε } N. \text{ Όμως } a_{N+1} = \frac{1}{(2N+3)!(4N+7)} \leq \frac{1}{5!11} < \frac{1}{10^3}, \text{ για } N \geq 1.$$

Επομένως, το μερικό άθροισμα $\sum_{n=0}^1 (-1)^n a_n = a_0 - a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{13}{42}$ προσεγγίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών (κλασματικών) ψηφίων.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

i) (μον. 4) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^3 e^{-x^4} dx$.

ii) (μον. 4) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{5-} \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx$.

iii) (μον. 12) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

$$(\beta) \int_{0+}^1 \frac{e^x}{x} dx$$

$$(\gamma) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{x^3-x} dx$$

Λύση της 4ης άσκησης

i) Θέτοντας $u = x^4$, έχουμε $du = 4x^3 dx$, άρα για $b > 1$ έχουμε $\int_1^b x^3 e^{-x^4} dx = \frac{1}{4} \int_1^{b^4} e^{-u} du = -\frac{e^{-u}}{4} \Big|_1^{b^4} = \frac{e^{-1} - e^{-b^4}}{4}$.

Επομένως, $\int_1^{+\infty} x^3 e^{-x^4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^3 e^{-x^4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1} - e^{-b^4}}{4} = \frac{e^{-1} - 0}{4} = \frac{1}{4e}$.

ii) Θέτοντας $u = 5 - x$, έχουμε $du = -dx$, άρα για $b < 5$ έχουμε

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx = -\int_5^{5-b} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_{5-b}^5 \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} \Big|_{5-b}^5 = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5-b}.$$
 Επομένως,

$$\int_0^{5-} \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx = \lim_{b \rightarrow 5-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx = \lim_{b \rightarrow 5-} (2\sqrt{5} - 2\sqrt{5-b}) = 2\sqrt{5}.$$

Εναλλακτικά, επειδή το σημείο $x = 5$ είναι ιδιόμορφο σημείο για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{5-} \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx$

και η $-2\sqrt{5-x}$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{\sqrt{5-x}}$ στο διάστημα $[0, 5)$, έπεται ότι

$$\int_0^{5-} \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{5-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-2\sqrt{5-x} \right) \Big|_0^{5-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (2\sqrt{5-0} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{5}.$$

iii)

(α) Έχουμε $0 < \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} < \frac{1}{x^2}$, για κάθε $x \geq 1$. Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει (από το παράδειγμα στη σελίδα 162 του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου), έπεται ότι και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης.

(β) Έχουμε $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$. Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0+}^1 \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει (από το παράδειγμα στη σελίδα 164 του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου), έπεται ότι και το $\int_{0+}^1 \frac{e^x}{x} dx$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης.

(γ) Έχουμε $\frac{\sqrt{x^5+1}}{x^3-x} > \frac{\sqrt{x^5}}{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$, για κάθε $x \geq 2$. Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνει (από το παράδειγμα στη σελίδα 162 του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου), έπεται ότι και το $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{x^3-x} dx$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

A) (μον. 3) Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a^2 + b^2 \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C,$$

όπου C σταθερά.

B) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

- $f(x) = e^x + e^{-x}$, για κάθε $x \in (-\pi, \pi]$,
- $f(x + 2\pi) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) (μον. 3) Να υπολογιστεί το $f(-\pi) + 5f(2\pi)$.

ii) (μον. 3) Να εξηγηθεί γιατί η f είναι άρτια συνάρτηση.

iii) (μον. 6) Να υπολογιστεί η σειρά Fourier της f .

iv) (μον. 5) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της f , να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Λύση της 5ης άσκησης

A) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) \right) &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(a e^{ax} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + e^{ax} (-ab \sin(bx) + b^2 \cos(bx)) \right) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a^2 + b^2) \cos(bx) = e^{ax} \cos(bx). \end{aligned}$$

Επομένως, η $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx))$ είναι αντιπαράγωγος

της $e^{ax} \cos(bx)$, άρα $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C$, όπου C σταθερά.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διπλή παραγοντική ολοκλήρωση ως εξής:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos(bx) dx, \text{ οπότε} \\ \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin(bx) + C, \text{ δηλαδή} \end{aligned}$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

B)

i) Η περιοδικότητα της f δίνει $f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi) = e^\pi + e^{-\pi}$ και $f(2\pi) = f(0 + 2\pi) = f(0) = 2$. Επομένως, $f(-\pi) + 5f(2\pi) = e^\pi + e^{-\pi} + 10$.

ii) Από το προηγούμενο υποερώτημα, ξέρουμε ότι $f(-\pi) = f(\pi)$. Επίσης, για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$ ισχύει ότι $f(-x) = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x} = f(x)$. Επομένως, $f(x) = f(-x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Έστω τώρα τυχόν $x \in \mathbb{R}$. Ο x βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά περιττά πολλαπλάσια του π , δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $(2n-1)\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$, δηλαδή $x - 2n\pi \in [-\pi, \pi]$. Με βάση αυτό που δείξαμε παραπάνω, έπεται ότι $f(x - 2n\pi) = f(-(x - 2n\pi)) = f(-x + 2n\pi)$. Από την περιοδικότητα της f συμπεραίνουμε ότι $f(x) = f(x - 2n\pi) = f(-x + 2n\pi) = f(-x)$. Αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι άρτια.

iii) Από το προηγούμενο υποερώτημα, η σειρά Fourier F της f θα δίνεται από άθροισμα συνημιτόνων, δηλαδή $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$. Υπολογίζουμε τώρα τους συντελεστές a_n , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι άρτια και το διάστημα $[-\pi, \pi]$ είναι συμμετρικό ως προς το 0. Για $n=0$, έχουμε ότι

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{\pi} (e^x - e^{-x}) \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}. \text{ Επίσης, για } n \geq 1, \text{ έχουμε ότι}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (e^x + e^{-x}) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cos(nx) dx.$$

Χρησιμοποιώντας το Α) καθώς και τις σχέσεις $\cos(n\pi) = (-1)^n$ και $\sin(n\pi) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{1+n^2} (\cos(nx) + n \sin(nx)) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{e^{-x}}{1+n^2} (-\cos(nx) + n \sin(nx)) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi(1+n^2)} ((-1)^n e^{\pi} - 1) + (1 - (-1)^n e^{-\pi}) \\ = \frac{2(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}. \text{ Επομένως, } F(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx) \right).$$

iv) Χρησιμοποιούμε τις τιμές των συναρτήσεων f και F στο σημείο $x_0 = 0$. Συγκεκριμένα, θέλουμε να συμπεράνουμε ότι $F(0) = f(0)$. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα κριτήρια με τα οποία μπορεί να καταλήξει κανείς στο επιθυμητό συμπέρασμα. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής:

Η f είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Επίσης, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (e^x + e^{-x}) = e^{\pi} + e^{-\pi}$ και $\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} (e^x + e^{-x}) = e^{-\pi} + e^{\pi}$. Άρα η f είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

(ακριβέστερα, από την περιοδικότητα της f μπορεί να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$). Επίσης, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 (ακριβέστερα, από την περιοδικότητα της f , μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της f σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$).

Εναλλακτικά, πληρούνται οι συνθήκες Dirichlet: η συνεχής συνάρτηση f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, και, λόγω μονοτονίας, λαμβάνει στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ ελάχιστη τιμή μόνο στο σημείο $x = 0$ και μέγιστη τιμή μόνο στα σημεία $x = -\pi$ και $x = \pi$.

Εναλλακτικά, πληρείται η συνθήκη Jordan: η f είναι μονότονη συνάρτηση στα διαστήματα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$, επομένως είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[-\pi, \pi]$.

Σε κάθε περίπτωση, όποιο κριτήριο και αν χρησιμοποιηθεί, έπεται ότι ισχύει η ισότητα $F(0) = f(0)$. Αφού

$$\cos(0) = 1 \text{ και } f(0) = 2, \text{ έπεται ότι } \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2} \right) = 2, \text{ άρα } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$