

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 9) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{3n+1}{2n+2}$ είναι μονότονη και φραγμένη. Να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

β) (μον. 6) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $b_n = \frac{(-1)^n n}{2n+1}$ είναι φραγμένη αλλά αποκλίνουσα.

γ) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $c_n = \frac{(-2)^n}{n!}$ είναι συγκλίνουσα.

Λύση της 1ης άσκησης

α) Η ακολουθία είναι αύξουσα και μάλιστα γνησίως: πράγματι, η σχέση $a_n < a_{n+1}$ ισοδυναμεί με την ανισότητα $\frac{3n+1}{2n+2} < \frac{3n+4}{2n+4}$, δηλαδή με την ανισότητα $6n^2 + 14n + 4 < 6n^2 + 14n + 8$, η οποία προφανώς ισχύει για κάθε n . Εναλλακτικά,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+4}{2n+4} - \frac{3n+1}{2n+2} = \frac{(3n+4)(2n+2) - (3n+1)(2n+4)}{(2n+4)(2n+2)} = \frac{4}{(2n+4)(2n+2)} > 0, \text{ άρα } a_n < a_{n+1} \text{ για κάθε } n.$$

Η ακολουθία είναι φραγμένη. Πράγματι, η σχέση $a_n < \frac{3}{2}$ ισοδυναμεί με την ανισότητα $\frac{3n+1}{2n+2} < \frac{3}{2}$, δηλαδή με την ανισότητα $6n+2 < 6n+6$, η οποία ισχύει για κάθε n . Επίσης, προφανώς $a_n > 0$, για κάθε n .

Εναλλακτικά, η ακολουθία είναι αύξουσα, άρα $1 = a_1 \leq a_n = \frac{3n+1}{2n+2} < \frac{3n+1}{2n} = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{4}{2} = 2$, για κάθε n .

Αφού είναι φραγμένη και μονότονη, είναι συγκλίνουσα και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$.

β) Για κάθε $n \geq 1$, έχουμε $|b_n| = \left| \frac{(-1)^n n}{2n+1} \right| = \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$, καθώς $2n < 2n+1$. Επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη (κατά απόλυτη τιμή) από το $\frac{1}{2}$.

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2n+1}{4n+3} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{3}{n}} = -\frac{1}{2}$, η ακολουθία

είναι αποκλίνουσα, καθώς δύο υπακολουθίες της συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

γ) Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$, η ακολουθία $(c_n)_{n \geq 1}$ συγκλίνει στο 0, από το κριτήριο του λόγου για ακολουθίες.

Εναλλακτικά, από το ανάπτυγμα Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ συγκλίνει στο e^{-2} , άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{n!} = 0$.

Άσκηση 2 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

α) (μον. 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\pi \sqrt{n^4 + 7}}{6n^2 + 5} \right)$

β) (μον. 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{e} - 1) \sin(n)$

γ) (μον. 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^3)}{\ln(n)}$

δ) (μον. 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^{n-3}}{n^n}$

ε) (μον. 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

Λύση της 2ης άσκησης

α) Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 7}}{6n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{7}{n^4}}}{6 + \frac{5}{n^2}} = \frac{1}{6}$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\pi \sqrt{n^4 + 7}}{6n^2 + 5} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

β) Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{e} - 1) = 1 - 1 = 0$ και $|\sin(n)| \leq 1$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{e} - 1) \sin(n) = 0$, διότι το γινόμενο μιας φραγμένης ακολουθίας με μια μηδενική ακολουθία είναι μηδενική ακολουθία.

γ) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital, ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{1+x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{1}{x^3} + 1} = 3. \text{ Επομένως, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^3)}{\ln(n)} = 3.$$

δ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^{n-3}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} \right)^n \frac{1}{(n+5)^3} = e^5 \cdot 0 = 0.$

ε) Αφού $4 = \sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} 4\sqrt[n]{3} = 4 \cdot 1 = 4$, έπεται, από το θεώρημα παρεμβολής, ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4.$

Εναλλακτικά, ακολουθούμε το Παράδειγμα 5 του 2.5.5, σελ. 29, στο αρχείο [akolouthies-1.pdf](#) στο

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό: Λογισμός: Θεωρούμε την ακολουθία $b_n = \frac{2^n + 3^n + 4^n}{2^{n-1} + 3^{n-1} + 4^{n-1}}$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{2^{n-1} + 3^{n-1} + 4^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(\left(\frac{2}{4} \right)^n + \left(\frac{3}{4} \right)^n + 1 \right)}{4^{n-1} \left(\left(\frac{2}{4} \right)^{n-1} + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + 1 \right)} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\left(\frac{2}{4} \right)^n + \left(\frac{3}{4} \right)^n + 1 \right)}{\left(\left(\frac{2}{4} \right)^{n-1} + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + 1 \right)} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0+0+1}{0+0+1} = 4,$$

καθώς $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, για $|a| < 1$. Επομένως, η ακολουθία των γεωμετρικών μέσων

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}} = \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}}{\sqrt[n]{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \text{ συγκλίνει στο } 4. \text{ Αφού } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1,$$

έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4$.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 14) Να δοθεί τύπος για την ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ που ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4 \quad \text{και} \quad a_{n+2} = 7a_{n+1} + 8a_n, \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

(Υπόδειξη: Για $n \geq 1$, θεωρούμε τον 2×1 πίνακα $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$. Να αποδειχθεί ότι $v_n = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} v_1$, να

υπολογιστεί ο πίνακας $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$ και να βρεθεί ο ζητούμενος τύπος για το a_n).

β) (μον. 6) Έστω $(b_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Να αποδειχθεί

ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt[n]{n}}$ συγκλίνει και ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt[n]{n}} x^n$ συγκλίνει απόλυτα όταν $x \in (-1, 1)$.

Λύση της 3ης άσκησης

α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Για να αποδείξουμε ότι $v_n = A^{n-1} v_1$, για κάθε $n \geq 1$, χρησιμοποιούμε επαγωγή ως

προς n . Ο ισχυρισμός προφανώς αληθεύει για $n=1$. Έστω ότι αληθεύει για το n , δηλαδή ότι $v_n = A^{n-1} v_1$.

Τότε $v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a_{n+1} + 8a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A v_n = A A^{n-1} v_1 = A^n v_1 = A^{(n+1)-1} v_1$, άρα ο ισχυρισμός

αληθεύει για το $n+1$.

Θα διαγωνοποιήσουμε τώρα τον πίνακα A . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ισούται με

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 8 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda+1)(\lambda-8), \text{ άρα οι ιδιοτιμές του } A \text{ είναι οι } \lambda = -1 \text{ και } \lambda = 8$$

και είναι απλές. Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -1$ δίνεται από τη λύση του συστήματος

$$(A + I)X = 0, \text{ το οποίο γράφεται ως } \begin{matrix} 8x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}. \text{ Αυτό δίνει } x_1 = -x_2, \text{ άρα ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο}$$

$\{(-x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1, 1)\}$, ο οποίος προφανώς έχει το μονοσύνολο $\{(-1, 1)\}$ ως βάση. Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 8$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(A - 8I)X = 0$, το οποίο γράφεται

$$\text{ως } \begin{matrix} -x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 - 8x_2 = 0 \end{matrix}. \text{ Αυτό δίνει } x_1 = 8x_2, \text{ άρα ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο } \{(8x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(8, 1)\}, \text{ ο}$$

ο οποίος προφανώς έχει το μονοσύνολο $\{(8, 1)\}$ ως βάση. Επομένως, από τη Γραμμική Άλγεβρα, $A = PDP^{-1}$,

$$\text{όπου } P = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{και,} \quad \text{εύκολα} \quad P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Άρα}$$

$$A^{n-1} = (PDP^{-1})^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 8^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-1)^n & 8^n \\ (-1)^{n-1} & 8^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 8^n & 8 \cdot (-1)^n + 8^n \\ (-1)^n + 8^{n-1} & 8 \cdot (-1)^{n-1} + 8^{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Επομένως,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = v_n = A^{n-1} v_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 8^n & 8 \cdot (-1)^n + 8^n \\ (-1)^n + 8^{n-1} & 8 \cdot (-1)^{n-1} + 8^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 8^n & 8 \cdot (-1)^n + 8^n \\ (-1)^n + 8^{n-1} & 8 \cdot (-1)^{n-1} + 8^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{συνεπώς } a_n = \frac{4 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 8^{n-1} + 8 \cdot (-1)^{n-1} + 8^{n-1}}{9} = \frac{5 \cdot 8^{n-1} + 4 \cdot (-1)^{n-1}}{9}, \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

β) Αφού $0 \leq \frac{b_n}{\sqrt{n}} \leq b_n$ για κάθε $n \geq 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, έπεται, από το κριτήριο σύγκρισης, ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}} x^n$ συγκλίνει για $x=1$, άρα, από τη θεωρία, συγκλίνει απόλυτα για $|x| < 1$.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 2) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{8^n}$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της.

β) (μον. 3) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της.

γ) (μον. 15) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n} \quad (ii) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$$

$$(iv) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \quad (v) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$$

Λύση της 4ης άσκησης

α) Η σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{3}{8}$. Αφού $\frac{3}{8} \in (-1, 1)$, η σειρά συγκλίνει στο $\frac{1}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{8}{5}$.

β) $\frac{1}{9n^2 + 3n - 2} = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3(n+1)-1} \right)$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$ είναι τηλεσκοπική

και συγκλίνει στο $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{6}$.

γ)

(i) Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{\frac{e^{n+1}}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{e n^3} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{e} < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ συγκλίνει, από το κριτήριο

λόγου του D' Alembert.

(ii) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln(x)\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital,

ισούται με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Επομένως, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}}} = 0$. Αφού η σειρά $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, έπεται,

από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, ότι και η σειρά $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

(iii) Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2+\frac{1}{n}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$ αποκλίνει.

(iv) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του Leibniz για τις εναλλάσσουσες σειρές: Κατ' αρχήν $a_n > 0$, για $n \geq 3$.

Η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ είναι μηδενική: πράγματι, το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ είναι απροσδιόριστη

μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital, ισούται με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Επίσης, η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 3}$ είναι

φθίνουσα: πράγματι, αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ έχει παράγωγο

$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$, η οποία είναι αρνητική για $x > e$, άρα και για $x > 3$. Επομένως η σειρά $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

συγκλίνει.

(v) Αφού $\left|(-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έπεται, από το κριτήριο σύγκρισης

σειρών, ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$ είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και συγκλίνουσα.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 3}{10n}\right)^n (x+4)^n$.

β) (μον. 8) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής μεταβλητής x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+5)4^n}.$$

γ) (μον. 8) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3\sin x - \cos(2x)$. Να υπολογιστεί το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο Maclaurin της f . Κάνοντας εκτίμηση του σφάλματος που προκύπτει από την προσέγγιση της f από το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο Maclaurin της, να βρεθούν πραγματικές σταθερές a, b, c, d τέτοιες ώστε $|f(x) - a - bx - cx^2| \leq d|x|^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση της 5ης άσκησης

α) Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 + 7n + 3}{10n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7n + 3}{10n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 7 + \frac{3}{n}}{10} = +\infty$, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

ισούται με $\frac{1}{\infty} = 0$.

β) Έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+6)4^{n+1}}}{\frac{1}{(n+5)4^n}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n+6} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{6}{n}} = \frac{1}{4}$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

(η οποία έχει κέντρο -3) ισούται με 4 . Συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει (και μάλιστα απόλυτα) για $|x+3| < 4$, δηλαδή για $x \in (-7, 1)$. Εξετάζουμε τώρα τη σύγκλιση στα άκρα αυτού του διαστήματος:

Για $x = -7$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+5}$, η οποία συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz για τις

εναλλάσσουσες σειρές, καθώς η ακολουθία (θετικών όρων) με γενικό όρο $\frac{1}{n+5}$ είναι προφανώς φθίνουσα και μηδενική.

Για $x = 1$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$, η οποία αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης καθώς για $n \geq 5$

έχουμε $\frac{1}{n+5} \geq \frac{1}{2n}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ αποκλίνει. Εναλλακτικά, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+5} = 1$, οπότε, από το

οριακό κριτήριο σύγκρισης, αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$.

Συμπερασματικά, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+5)4^n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $x \in [-7, 1)$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις σειρές Maclaurin του ημιτόνου και συνημιτόνου και μετά από πράξεις, έχουμε ότι

$$f(x) = 3\sin x - \cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = -1 + 3x + 2x^2 + \dots$$

Επομένως το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο Maclaurin της f δίνεται από τον τύπο $f(x) = -1 + 3x + 2x^2$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο υπολοίπου του Lagrange, έχουμε $f(x) - (-1 + 3x + 2x^2) = \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3$, για κάποιο

$\xi \in \mathbb{R}$. Αφού $f'(x) = 3\cos x + 2\sin(2x)$, $f''(x) = -3\sin x + 4\cos(2x)$, $f'''(x) = -3\cos x - 8\sin(2x)$, έχουμε

$$|f(x) - (-1 + 3x + 2x^2)| = \frac{|f'''(\xi)| |x|^3}{3!} = \frac{|x|^3 |-3\cos \xi - 8\sin(2\xi)|}{6} \leq \frac{|x|^3 (3|\cos \xi| + 8|\sin(2\xi)|)}{6} \\ \leq \frac{|x|^3 (3+8)}{6} = \frac{11|x|^3}{6}.$$

Επομένως, $a = -1$, $b = 3$, $c = 2$ και $d = \frac{11}{6}$.