

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	14/03/2018 23:59μμ
Ακ. Έτος	2017-18	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	4	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4^η

Ημερομηνία ανάρτησης:	Πέμπτη	08 Φεβρουαρίου 2018
Ημερομηνία παράδοσης:	Κυριακή	11 Μαρτίου 2018
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	14 Μαρτίου 2018 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Παρασκευή	16 Μαρτίου 2018

Πριν από τη λύση των ασκήσεων να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 4ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 2 (ακολουθίες - όρια)

Ενότητα 3 (σειρές)

Ενότητα 8 (ανάπτυγμα Taylor)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να μελετηθεί επίσης το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στο study.eap.gr:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός

- Ακολουθίες,
- Σειρές,
- Σειρές Taylor.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και κατανόηση των παρακάτω σημαντικών εννοιών:

- Ακολουθίες: φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες, απειριζόμενες, κριτήρια σύγκλισης, εύρεση ορίων, ιδιότητες ορίων, ασυμπτωτική συμπεριφορά.
- Σειρές: γενικός όρος, μερικά αθροίσματα, ειδικού τύπου σειρές, κριτήρια σύγκλισης, σχετική και απόλυτη σύγκλιση, εκτίμηση σφάλματος από μερικά αθροίσματα, κριτήρια σύγκρισης σειρών.
- Πολυωνυμική προσέγγιση, αναπτύγματα Taylor, μέθοδοι εύρεσης σειρών Taylor και Maclaurin, σειρές Taylor βασικών συναρτήσεων, δυναμοσειρές, διάστημα σύγκλισης.

Να διαβαστούν προσεκτικά οι εκφωνήσεις και να αιτιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης της Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

- i) (μον. 6) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{n+1}{5^n}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- ii) (μον. 3) Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $b_n = \frac{e^n}{2^n + 1}$. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.
- iii) (μον. 3) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $c_n = n + \sin(1+3^n)$ είναι μη φραγμένη.
- iv) (μον. 8) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $d_n = \frac{(-1)^n (n+1)}{3\sqrt{n^2+7}}$ είναι φραγμένη. Να αποδειχθεί ότι οι υπακολουθίες $(d_{2n})_{n \geq 1}$ και $(d_{2n-1})_{n \geq 1}$ είναι συγκλίνουσες. Είναι η ακολουθία $(d_n)_{n \geq 1}$ συγκλίνουσα;

Λύση της 1ης άσκησης

- i) Η ακολουθία έχει θετικούς όρους, άρα είναι κάτω φραγμένη από το 0. Επίσης, για $n \geq 1$, έχουμε ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{5^{n+1}}}{\frac{n+1}{5^n}} = \frac{n+2}{5n+5}$. Αφού $n+2 < 5n+5$, έπεται ότι $a_{n+1} < a_n$, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι φθίνουσα (και μάλιστα γνησίως). Εναλλακτικά, $a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{5^{n+1}} - \frac{n+1}{5^n} = \frac{n+2-5(n+1)}{5^{n+1}} = -\frac{4n+3}{5^{n+1}} < 0$, άρα $a_{n+1} < a_n$, για κάθε n , άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι φθίνουσα.

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{5n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{5+\frac{5}{n}} = \frac{1+0}{5+0} = \frac{1}{5} < 1$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (βλ. Παράδειγμα 5, σελίδα 25,

στο αρχείο `akolouthies.pdf` στο ΣΕΥ). Εναλλακτικά, αφού, από τον κανόνα L'Hôpital, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{5^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^x \ln 5} = 0, \text{ έπεται επίσης ότι } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5^n} = 0.$$

- ii) Έχουμε $b_n = \frac{e^n}{2^n + 1} > \frac{e^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2} \right)^n$. Αφού $\frac{e}{2} > 1$, η ακολουθία με γενικό όρο $\left(\frac{e}{2} \right)^n$ αποκλίνει στο $+\infty$, επομένως το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία $(b_n)_{n \geq 1}$.

Εναλλακτικά, αφού από τον κανόνα L'Hôpital ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2^x + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2^x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{2} \right)^x = +\infty$,

έπεται επίσης ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{2^n + 1} = +\infty$.

Εναλλακτικά, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2^n + 1}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{e} \right)^n + \left(\frac{1}{e} \right)^n} = +\infty$, καθώς $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e} \right)^n = 0$.

- iii) Για κάθε n , ισχύει ότι $\sin(1+3^n) \geq -1$, άρα $c_n \geq n-1$. Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) = +\infty$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, άρα η ακολουθία $(c_n)_{n \geq 1}$ δεν είναι άνω φραγμένη, επομένως ούτε και φραγμένη.

Εναλλακτικά, έστω ότι η $(c_n)_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη. Επειδή η ακολουθία με τύπο $s_n = \sin(1+3^n)$ είναι επίσης φραγμένη, έπεται ότι και η ακολουθία $(c_n - s_n)_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη. Όμως $c_n - s_n = n$, για κάθε n , άτοπο.

iv) Έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3\sqrt{n^2+7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}} = \frac{1+0}{3\sqrt{1+0}} = \frac{1}{3}$, άρα η ακολουθία $(|d_n|)_{n \geq 1}$ είναι

συγκλίνουσα, επομένως και φραγμένη. Αυτό συνεπάγεται ότι και η ακολουθία $(d_n)_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη.

Εναλλακτικά, $|d_n| = \frac{n+1}{3\sqrt{n^2+7}} \leq \frac{n+1}{3n} \leq \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$, άρα $-\frac{2}{3} \leq d_n \leq \frac{2}{3}$, επομένως η $(d_n)_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη.

Επίσης, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3\sqrt{4n^2+7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{6\sqrt{1+\frac{7}{4n^2}}} = \frac{2+0}{6\sqrt{1+0}} = \frac{1}{3}$, άρα η υπακολουθία $(d_{2n})_{n \geq 1}$ συγκλίνει

στο $\frac{1}{3}$. Όμοια, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{3\sqrt{4n^2-4n+8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{6\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{-2}{6\sqrt{1+0+0}} = -\frac{1}{3}$, άρα η υπακολουθία

$(d_{2n-1})_{n \geq 1}$ συγκλίνει στο $-\frac{1}{3}$. Αφού η υπακολουθία άρτιων δεικτών και η υπακολουθία περιττών δεικτών

συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, έπεται ότι η ακολουθία $(d_n)_{n \geq 1}$ αποκλίνει (βλ. Πρόταση 2.7.3 στο αρχείο [akolouthies.pdf](#) στο ΣΕΥ).

Άσκηση 2 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

i) (μον. 2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+1}$$

ii) (μον. 3)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos(n^{-1})\right)$$

iii) (μον. 3)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi^2) \ln(1+n)}{n}$$

iv) (μον. 3)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+1}\right)$$

v) (μον. 3)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n$$

vi) (μον. 3)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

vii) (μον. 3)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n!)$$

Λύση της 2ης άσκησης

i)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = e^{-2} \cdot 1 = e^{-2}.$$

(Σημείωση: Χρησιμοποιούμε εδώ το γεγονός ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Η απόδειξη δίνεται στο Λήμμα 2.12.10 στο αρχείο [akolouthies.pdf](#) στο ΣΕΥ και βασίζεται στην προσεκτική μελέτη (Ενότητα

2.12) δυνάμεων με πραγματικό εκθέτη. Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει ως εξής:

Έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \stackrel{\boxed{x=\frac{1}{n}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}$. Από τον κανόνα L'Hôpital, έπεται ότι

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+ax)}{x} \stackrel{\boxed{0/0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a}{1+ax} = a$. Άρα, $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}} = e^a$, λόγω συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης,

επομένως $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

ii) Εξετάζουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (1 - \cos(x^{-1}))$. Θέτοντας $u = x^{-1}$ και αφού για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$,

αρκεί να υπολογιστεί το $\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos u}{u^2}$. Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, άρα από τον κανόνα L'Hôpital,

το όριο αυτό ισούται με $\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}$. Επομένως, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (1 - \cos(n^{-1})) = \frac{1}{2}$.

iii) Η ακολουθία $(\sin(n\pi^2))_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη, διότι $|\sin(n\pi^2)| \leq 1$, για κάθε n . Επίσης, από τον κανόνα

L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{\boxed{\infty/\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 0$. Από το Λήμμα 2.4.3 στο αρχείο [akolouthies.pdf](#) στο ΣΕΥ (το οποίο, διαβάζεται και ως «μηδενική ακολουθία επί φραγμένη ακολουθία ίσον μηδενική ακολουθία»), έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi^2) \ln(1+n)}{n} = 0$.

iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 2 - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

v) Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \stackrel{\boxed{m=n^2}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{m}\right)^m = e^2 \approx 7.389$, υπάρχει φυσικός n_0 έτσι ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει

$$7 \leq \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \leq 8. \quad \text{Επομένως,} \quad \sqrt[n]{7} \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} = \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n \leq \sqrt[n]{8}, \quad \text{για κάθε } n \geq n_0. \quad \text{Αφού}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8} = 1$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής (Πρόταση 2.4.6 στο αρχείο

[akolouthies.pdf](#) στο ΣΕΥ).

(Σημείωση: Γενικότερα, ισχύει το εξής:

Πρόταση: Αν $(a_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Απόδειξη: Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0$, υπάρχει φυσικός n_0 έτσι ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει $\frac{L}{2} \leq a_n \leq \frac{3L}{2}$.

Επομένως, $\sqrt[n]{\frac{L}{2}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3L}{2}}$, για κάθε $n \geq n_0$. Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{L}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3L}{2}} = 1$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής).

Εναλλακτικά, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n \stackrel{\boxed{\frac{1}{n}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{\ln(1+2x^2)}{x}}$. Από τον κανόνα L'Hôpital, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} \stackrel{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4x}{1+2x^2} = 0. \text{ Άρα } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n = e^0 = 1, \text{ λόγω συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης.}$$

$$\text{vi) Έστω } a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}. \text{ Έχουμε } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 (n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{1+0}{4+0} = \frac{1}{4} < 1. \text{ Επομένως, πάλι από το Παράδειγμα 5, σελίδα 25, στο αρχείο}$$

akolouthies.pdf στο ΣΕΥ, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Εναλλακτικά, αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από το κριτήριο λόγου για σειρές, επομένως $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\text{vii) Αφού } \lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \text{ έπεται ότι } \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n!) = \frac{\pi}{2}.$$

Άσκηση 3 (Μον. 20)

i) (μον. 8) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ που ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$a_1 = 1 \text{ και } a_{n+1} = \sqrt{12 + 4a_n}, \text{ για κάθε } n \geq 1,$$

συγκλίνει και να υπολογιστεί το όριό της.

ii) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη σειρά, να εξηγηθεί τι ακριβώς εννοούμε όταν γράφουμε τον δεκαδικό αριθμό 0.027027027027..... (όπου, μετά το σημείο της υποδιαστολής, τα δεκαδικά ψηφία 0, 2, 7 επαναλαμβάνονται επ' άπειρον με αυτή τη διάταξη). Να εξηγηθεί επίσης γιατί ο συγκεκριμένος δεκαδικός αριθμός ισούται με $\frac{1}{37}$.

iii) (μον. 6) Έστω $(b_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{7b_n^2 + 9b_n^3}$ συγκλίνει και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n)}{b_n}$ αποκλίνει.

Λύση της 3ης άσκησης

i) Η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ προφανώς έχει θετικούς όρους. Θα δείξουμε πρώτα ότι είναι αύξουσα (και μάλιστα γνησίως), δηλαδή ότι $a_{n+1} > a_n$, για κάθε n . Αυτό θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς n . Ο ισχυρισμός ισχύει για $n=1$, αφού $a_2 = \sqrt{12 + 4a_1} = \sqrt{12 + 4 \cdot 1} = 4 > a_1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το n , δηλαδή ότι $a_{n+1} > a_n$. Επομένως $12 + 4a_{n+1} > 12 + 4a_n > 0$, συνεπώς $\sqrt{12 + 4a_{n+1}} > \sqrt{12 + 4a_n}$, το οποίο σημαίνει ότι $a_{n+2} > a_{n+1}$, δηλαδή ότι ο ισχυρισμός ισχύει και για το $n+1$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι άνω φραγμένη. Συγκεκριμένα θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$a_n < 6$, για κάθε n . Ο ισχυρισμός ισχύει για $n=1$, αφού $a_1=1 < 6$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το n , δηλαδή ότι $a_n < 6$. Τότε $a_{n+1} = \sqrt{12+4a_n} < \sqrt{12+4 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$, άρα ο ισχυρισμός ισχύει και για το $n+1$.

Επομένως, ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

(Σημείωση: Η επιλογή του αριθμού 6 ως υπονήφιου άνω φράγματος δεν είναι ούτε τυχαία ούτε μοναδική. Ψάχνοντας για έναν θετικό αριθμό b τέτοιον ώστε $a_n < b$, για κάθε n , παρατηρούμε ότι, από την αναδρομική σχέση που ορίζει την ακολουθία, θα έπρεπε επίσης να ισχύει $\sqrt{12+4a_n} < b$, για κάθε n . Αυτό θα εξασφαλιζόταν αν $\sqrt{12+4b} \leq b$, δηλαδή αν $b^2 - 4b - 12 \geq 0$. Η τελευταία ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως $(b+2)(b-6) \geq 0$, το οποίο μας επιτρέπει να επιλέξουμε ως υπονήφιο άνω φράγμα οποιονδήποτε αριθμό $b \geq 6$. Σε κάθε περίπτωση, η απόδειξη ότι το b που επιλέξαμε όντως αποτελεί άνω φράγμα της ακολουθίας είναι απαραίτητη).

Αφού η $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συμπεραίνουμε από τη θεωρία ότι είναι συγκλίνουσα. Έστω ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Τότε ισχύει επίσης ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$. Παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη της αναδρομικής σχέσης $a_{n+1} = \sqrt{12+4a_n}$, συμπεραίνουμε ότι $L = \sqrt{12+4L}$, άρα $L^2 - 4L - 12 = 0$, δηλαδή $L = -2$ ή $L = 6$. Η περίπτωση $L = -2$ απορρίπτεται καθώς η $(a_n)_{n \geq 1}$ έχει θετικούς όρους. Το τελικό συμπέρασμα είναι επομένως ότι $L = 6$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε πρώτα να αποδείξουμε επαγωγικά ότι $a_n < 6$, για κάθε n , ως εξής: Ο ισχυρισμός ισχύει για $n=1$, καθώς $a_1 = 1 < 6$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το n , δηλαδή ότι $a_n < 6$. Τότε

$$a_{n+1} - 6 = \sqrt{12+4a_n} - 6 = \frac{(\sqrt{12+4a_n} - 6)(\sqrt{12+4a_n} + 6)}{\sqrt{12+4a_n} + 6} = \frac{\sqrt{12+4a_n}^2 - 6^2}{\sqrt{12+4a_n} + 6} = \frac{4(a_n - 6)}{\sqrt{12+4a_n} + 6} < 0. \text{ Επομένως, ο}$$

ισχυρισμός ισχύει και για το $n+1$, άρα ισχύει για κάθε n . Κατόπιν, αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι γνησίως αύξουσα, ως εξής: Ο ισχυρισμός $a_{n+1} > a_n$ ισχύει για $n=1$, καθώς $a_2 = 4 > 1 = a_1$. Έστω ότι ισχύει για το n , δηλαδή ότι $a_{n+1} > a_n$. Τότε

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \sqrt{12+4a_{n+1}} - \sqrt{12+4a_n} = \frac{(\sqrt{12+4a_{n+1}} - \sqrt{12+4a_n})(\sqrt{12+4a_{n+1}} + \sqrt{12+4a_n})}{\sqrt{12+4a_{n+1}} + \sqrt{12+4a_n}} \\ &= \frac{\sqrt{12+4a_{n+1}}^2 - \sqrt{12+4a_n}^2}{\sqrt{12+4a_{n+1}} + \sqrt{12+4a_n}} = \frac{12+4a_{n+1} - (12+4a_n)}{\sqrt{12+4a_{n+1}} + \sqrt{12+4a_n}} = \frac{4(a_{n+1} - a_n)}{\sqrt{12+4a_{n+1}} + \sqrt{12+4a_n}} > 0. \end{aligned}$$

Άρα, ο ισχυρισμός ισχύει και για το $n+1$, επομένως ισχύει για κάθε n . Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι όπως και παραπάνω.

ii) Αν $d_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$, για κάθε n , ο δεκαδικός αριθμός $0.d_1d_2\dots$ είναι η δεκαδική αναπαράσταση του άπειρου αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$, το οποίο είναι συγκλίνουσα σειρά, καθώς $0 \leq \frac{d_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$, για κάθε n και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ συγκλίνει στο $\frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$. Ειδικότερα, ο αριθμός $0.027027\dots$ ισούται με

$$\frac{0}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \dots = \frac{27}{1000} + \frac{27}{1000^2} + \dots = \frac{27}{1000} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1000^n} = \frac{27}{1000} \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{27}{999} = \frac{1}{37}.$$

Εναλλακτικά, ξέρουμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός δεκαδικού αριθμού με το 1000 μετακινεί την υποδιαστολή τρεις θέσεις δεξιά. Επομένως, για $x = 0.027027\dots$ έχουμε ότι $1000x = 27.027027027\dots$

Με αφαίρεση κατά μέλη, παίρνουμε $1000x - x = 27$, δηλαδή $x = \frac{27}{999} = \frac{1}{37}$.

iii) Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7b_n^2 + 9b_n^3}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{7 + 9b_n} = \sqrt{7} \neq 0$.

Από το 3.2.2 στο αρχείο seires.pdf στο ΣΕΥ, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{7b_n^2 + 9b_n^3}$ συγκλίνει.

Εναλλακτικά, έστω $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Επειδή για κάθε n έχουμε $\sqrt{7b_n^2 + 9b_n^3} = b_n \sqrt{7 + 9b_n} \leq b_n \sqrt{7 + 9b} = b_n \sqrt{7 + 9b}$, η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{7b_n^2 + 9b_n^3}$ συγκλίνει σύμφωνα με το 3.2.1 στο αρχείο seires.pdf στο ΣΕΥ.

Εναλλακτικά, αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, έπεται, από τον ορισμό του ορίου, ότι υπάρχει φυσικός n_0 έτσι ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει $b_n \leq 1$. Επομένως $0 \leq \sqrt{7b_n^2 + 9b_n^3} \leq \sqrt{7b_n^2 + 9b_n^2} = 4b_n$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{7b_n^2 + 9b_n^3}$, από το κριτήριο σύγκρισης στη σελίδα 36 του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για το δεύτερο υποερώτημα, παρατηρούμε ότι, δεδομένου ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, το όριο

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(b_n)}{b_n}$ ισούται με $1 \neq 0$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n)}{b_n}$ δεν μπορεί να συγκλίνει.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

i) (μον. 3) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{10^n}$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της.

ii) (μον. 3) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της.

iii) (μον. 10) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000000^n} \quad (\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{n^3 + n^2 + 1} \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{7n+5}\right)$$

$$(\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{4^n} \quad (\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

iv) (μον. 4) Να βρεθούν όλες οι τιμές της θετικής σταθεράς a για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$ συγκλίνει. Για ποιές από αυτές τις τιμές του a είναι η σύγκλιση απόλυτη;

Λύση της 4ης άσκησης

i) Η σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{\pi^2}{10}$. Επειδή $\left|\frac{\pi^2}{10}\right| < 1$, η σειρά συγκλίνει στο $\frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{10}} = \frac{10}{10 - \pi^2}$.

ii) Επειδή $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ είναι τηλεσκοπική. Άρα το μερικό άθροισμα $\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ ισούται με $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(N+1)^2}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1^2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)^2} = 1 - 0 = 1$.

iii)

(α) Αφού $\frac{(n+1)!}{1000000^{n+1}} = \frac{n+1}{1000000} \geq 1$, για κάθε $n \geq 999999$, η σειρά αποκλίνει, από το κριτήριο λόγου.

(β) Αφού $\frac{2n+7}{n^3+n^2+1} \leq \frac{2n+7}{n^3} = \frac{2}{n^2} + \frac{7}{n^3}$, και οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ συγκλίνουν (ως p -σειρές για $p=2$ και $p=3$, αντίστοιχα), έπεται, από το κριτήριο σύγκρισης, ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{n^3+n^2+1}$ επίσης συγκλίνει.

Εναλλακτικά, επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+7}{n^3+n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+7n^2}{n^3+n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{7}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} = 2$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έπεται ότι και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{n^3+n^2+1}$ συγκλίνει (βλ. κριτήριο σύγκρισης 3.2.2 στο αρχείο seires.pdf στο ΣΕΥ).

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση f στο $[1, +\infty)$ με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{x}{7x+5}\right)$. Έστω $u = \frac{x}{7x+5}$. Για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε $u \rightarrow \frac{1}{7}$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{7x+5}\right) = \lim_{u \rightarrow \frac{1}{7}} \ln(u) = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$, άρα και $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n}{7n+5}\right) = \ln\left(\frac{1}{7}\right) \neq 0$. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{7n+5}\right)$ αποκλίνει από το 3.1 στο αρχείο seires.pdf στο ΣΕΥ.

Εναλλακτικά, $-\ln\left(\frac{n}{7n+5}\right) = \ln\left(\frac{7n+5}{n}\right) \geq \ln\left(\frac{7n}{n}\right) = \ln 7$, άρα η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ln\left(\frac{n}{7n+5}\right)\right)$ αποκλίνει αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \ln 7$ αποκλίνει. Επομένως και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{7n+5}\right)$ αποκλίνει.

(δ) Επειδή $\left|\frac{1+\cos(n)}{4^n}\right| \leq \frac{1+|\cos(n)|}{4^n} \leq \frac{2}{4^n}$ για κάθε n και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4^n}$ συγκλίνει, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{4^n}$ συγκλίνει απόλυτα και επομένως συγκλίνει (βλ. σελίδα 1 στο αρχείο seires.pdf στο ΣΕΥ).

(ε) Αφού $0 \leq \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε n (καθώς $\sin x \leq x$, για κάθε $x > 0$) και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έπεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Εναλλακτικά, επειδή $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έπεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει (βλ. κριτήριο σύγκρισης 3.2.2 στο αρχείο seires.pdf στο ΣΕΥ).

iv) Αν $a < 2$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^{4-2a} + \frac{1}{n^{2a}}} = +\infty \neq 0$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$ αποκλίνει.

Αν $a = 2$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} = 1 \neq 0$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$ αποκλίνει.

Έστω τώρα $a > 2$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$ είναι εναλλάσσουσα. Θέτουμε $a_n = \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$. Έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{n^{a-2}} = 0. \text{ Θα δείξουμε τώρα ότι η ακολουθία } (a_n)_{n \geq 1} \text{ είναι φθίνουσα.}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^a}$ στο διάστημα $(0, \infty)$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} x^a - a x^{a-1} \sqrt{x^4+1}}{x^{2a}} = \frac{(2-a)x^4 - a}{x^{a+1} \sqrt{x^4+1}} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \infty), \text{ άρα η } f \text{ είναι φθίνουσα}$$

(γνησίως) στο $(0, \infty)$. Ειδικότερα, $f(n) \geq f(n+1)$, δηλαδή $a_n \geq a_{n+1}$ για κάθε n , άρα η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι φθίνουσα. Από το κριτήριο του Leibniz για τις εναλλάσσουσες σειρές, έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ συγκλίνει. Συμπερασματικά, η σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a} \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν } a > 2.$$

Ξέρουμε ότι μια σειρά η οποία συγκλίνει απόλυτα δεν μπορεί να είναι αποκλίνουσα. Άρα, για να εξετάσουμε την απόλυτη σύγκλιση της σειράς, περιοριζόμαστε στην περίπτωση $a > 2$ και συγκρίνουμε τη

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$ με την p -σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-2}}$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης 3.2.2 στο αρχείο seires.pdf στο ΣΕΥ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}}{\frac{1}{n^{a-2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^4}} = 1. \text{ Άρα οι σειρές } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-2}} \text{ είτε συγκλίνουν}$$

ταυτόχρονα είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα. Αφού όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-2}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a-2 > 1$,

έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a > 3$. Με άλλα λόγια, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^a}$ συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν $a > 3$.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

i) (μον. 4) Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{3^n n^{n^2}} x^n$.

ii) (μον. 6) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής μεταβλητής x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{4^n n}}.$$

iii) (μον. 4) Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ γύρω από το σημείο $x_0 = 1$.

iv) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης, να εκφραστεί η συνάρτηση με τύπο $g(x) = e^{5x^2}$ ως δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο $x_0 = 0$. Επίσης, για κάθε θετικό ακέραιο n , να δοθεί τύπος για το $g^{(n)}(0)$ (την τιμή της n -οστής παραγώγου της g στο σημείο $x_0 = 0$).

Λύση της 5ης άσκησης

i) Έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{3^n n^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3}$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης της

δυναμοσειράς ισούται με $\frac{3}{e}$ (βλ. σελίδα 3 του αρχείου Seires_Taylor.pdf στο ΣΕΥ).

$$\text{ii)} \quad \text{Έχουμε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{4^{n+1}(n+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{4^n n}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}. \quad \text{Επομένως η ακτίνα σύγκλισης της}$$

δυναμοσειράς (η οποία έχει κέντρο -1) ισούται με 2 . Συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-3, 1)$. Εξετάζουμε τώρα τη σύγκλιση στα άκρα αυτού του διαστήματος:

Για $x = -3$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{4^n n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, η οποία συγκλίνει από το κριτήριο του

Leibniz για τις εναλλάσσουσες σειρές, καθώς η ακολουθία με γενικό όρο $\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

Για $x = 1$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{4^n n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, η οποία αποκλίνει ως p -σειρά για $p = \frac{1}{2}$.

Συμπερασματικά, η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{4^n n}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $x \in [-3, 1)$.

$$\text{iii)} \quad \text{Έχουμε} \quad f'(x) = \frac{-3x^2}{(1+x^3)^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{-6x(1+x^3)^2 + 18x^4(1+x^3)}{(1+x^3)^4} = \frac{-6x+12x^4}{(1+x^3)^3}. \quad \text{Επομένως,}$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2}, \quad f'(x_0) = f'(1) = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad f''(x_0) = f''(1) = \frac{3}{4}. \quad \text{Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο Taylor είναι}$$

$$\text{το} \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2.$$

iv) Αφού $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με το $5x^2$ και να πάρουμε

$$g(x) = e^{5x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (2n)!}{n!} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad \text{Συγκρίνοντας με το ανάπτυγμα Maclaurin} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{της } g,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ \frac{(2k)!5^k}{k!}, & \text{αν } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$