

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι προτεινόμενες λύσεις είναι ενδεικτικές. Οποιαδήποτε άλλη ορθή λύση είναι αποδεκτή.

Ημερομηνία Ανάρτησης: 9 Φεβρουαρίου 2016

Ημερομηνία Παράδοσης της εργασίας από τον Φοιτητή: 9 Μαρτίου 2016 (καταληκτική)

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να έχουν μελετηθεί τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των συγγραμμάτων και του βοηθητικού υλικού.

Οι ασκήσεις της 4^{ης} εργασίας αναφέρονται στις ενότητες:

Ενότητα 2 (Ακολουθίες – Όρια)

Ενότητα 3 (Σειρές)

Ενότητα 8 (Σειρές Taylor)

του συγγραμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι – Τόμος Α' - Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο **ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ** στο study.eap.gr ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό: Ακολουθίες,
 Σειρές,
 Σειρές Taylor.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

Η κατανόηση σημαντικών εννοιών στις ακολουθίες και σειρές πραγματικών αριθμών συγκεκριμένα:

Ακολουθίες: φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες, απειριζόμενες, κριτήρια σύγκλισης, εύρεση ορίων και ασυμπτωτικής συμπεριφοράς.

Σειρές: ειδικές κατηγορίες, κριτήρια σύγκλισης, άθροισμα και εκτίμηση σφάλματος από μερικά αθροίσματα, φράγματα αθροίσματος σειράς.

Δυναμοσειρές και σειρές Taylor, μέθοδοι εύρεσης σειρών Taylor και Maclaurin.

Αιτιολογήστε προσεκτικά ΟΛΕΣ τις απαντήσεις σας

Άσκηση 1 (μον. 20)

A) (μον. 8) Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση τις ακολουθίες με γενικούς όρους:

$$\text{i) } n \tan\left(\frac{1}{1+n}\right), \quad \text{ii) } \frac{n^{3/2}}{1+2^n}.$$

B) (μον. 12) Για $\alpha > 0$, να υπολογισθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών καθώς $n \rightarrow \infty$ (χρειάζεται διερεύνηση):

$$\text{i) } a_n = \frac{1+n^2+5n^3}{n^\alpha(n^2+2)}, \quad \text{ii) } b_n = \frac{2^n+3^n}{\alpha^n}, \quad \text{iii) } c_n = \sqrt{4n^2+2} - \alpha n.$$

Λύση 1ης άσκησης

Ai) Επειδή $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \frac{1}{\cos 0} = 1$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0$ έχουμε ότι $\frac{\tan\left(\frac{1}{1+n}\right)}{\frac{1}{1+n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$,

δηλαδή $(1+n) \tan\left(\frac{1}{1+n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Ομως $\frac{n}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \tan\left(\frac{1}{1+n}\right) \right] = 1$.

Aii) Έχουμε ότι $\left| \frac{n^{3/2}}{1+2^n} \right| \leq \left| \frac{n^{3/2}}{2^n} \right|$, δηλαδή η ακολουθία φράσσεται απολύτως από την $\frac{n^{3/2}}{2^n}$. Επειδή για $n \geq 1$

$$\lim \left| \frac{(n+1)^{3/2}}{\frac{2^{n+1}}{2^n}} \right| = \lim \frac{2^n(n+1)^{3/2}}{2^{n+1}n^{3/2}} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^{3/2} = \frac{1}{2} \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^{3/2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1, \text{ από το κριτήριο του}$$

«λόγου» για ακολουθίες, η $\left(\frac{n^{3/2}}{2^n} \right)$ είναι μηδενική. Επομένως, και η $\left(\frac{n^{3/2}}{1+2^n} \right)$ είναι μηδενική.

Bi) $a_n = \frac{1+n^2+5n^3}{n^\alpha(n^2+2)} = \frac{n^3 \left(5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^{\alpha+2} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)} = n^{3-\alpha-2} \cdot \frac{5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2}} = n^{1-\alpha} \cdot \frac{5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2}}$. Καθώς η ακολουθία

$$\frac{5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2}} \text{ συγκλίνει στο } 5, \text{ για την } a_n \text{ έχουμε:}$$

$\alpha = 1$	$n^{1-\alpha} = 1$, οπότε $a_n \rightarrow 5$
$\alpha > 1$	$n^{1-\alpha} \rightarrow 0$, οπότε $a_n \rightarrow 0$
$\alpha < 1$	$n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$, οπότε $a_n \rightarrow +\infty$.

Bii) Η ακολουθία $b_n = \frac{2^n+3^n}{\alpha^n} = \frac{2^n}{\alpha^n} + \frac{3^n}{\alpha^n} = \left(\frac{2}{\alpha} \right)^n + \left(\frac{3}{\alpha} \right)^n$ συγκλίνει. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η) $0 < \alpha < 3$, οπότε η ακολουθία $\left(\frac{3}{\alpha} \right)^n \rightarrow +\infty$ καθώς $\left| \frac{3}{\alpha} \right| > 1$, και $\left(\frac{2}{\alpha} \right)^n \rightarrow +\infty$ ή $\left(\frac{2}{\alpha} \right)^n \rightarrow 1$ ή $\left(\frac{2}{\alpha} \right)^n \rightarrow 0$. Άρα $\lim b_n = +\infty$.

2η) $\alpha = 3$, οπότε η ακολουθία $\left(\frac{3}{\alpha} \right)^n$ ισούται με την σταθερή 1 και $\left(\frac{2}{\alpha} \right)^n \rightarrow 0$ καθώς $\left| \frac{2}{3} \right| < 1$. Άρα $\lim b_n = 1$.

3η) $\alpha > 3$, τότε, καθώς $\left| \frac{2}{\alpha} \right| < 1$, $\left| \frac{3}{\alpha} \right| < 1$, έχουμε $\left(\frac{2}{\alpha} \right)^n \rightarrow 0$ και $\left(\frac{3}{\alpha} \right)^n \rightarrow 0$ συνεπώς $\lim b_n = 0$.

Biii)

$$c_n = \frac{(\sqrt{4n^2 + 2} - \alpha n)(\sqrt{4n^2 + 2} + \alpha n)}{\sqrt{4n^2 + 2} + \alpha n} = \frac{4n^2 + 2 - \alpha^2 n^2}{\sqrt{4n^2 + 2} + \alpha n} = \frac{(4 - \alpha^2)n^2 + 2}{\sqrt{4n^2 + 2} + \alpha n}$$
$$\frac{n^2[(4 - \alpha^2) + 2/n^2]}{n(\sqrt{4 + 2/n^2} + \alpha)} = n \frac{(4 - \alpha^2) + 2/n^2}{\sqrt{4 + 2/n^2} + \alpha}$$

Αν $\alpha=2$, τότε : $\lim c_n = \lim \frac{2}{\sqrt{4n^2 + 2} + 2n} = 0$.

Αν $\alpha > 0$ διάφορο του 2 τότε , τότε $c_n = \frac{(4 - \alpha^2)n^2 + 2}{\sqrt{4n^2 + 2} + \alpha n} = \frac{n^2 \left[(4 - \alpha^2) + \frac{2}{n^2} \right]}{n \left(\sqrt{4 + \frac{2}{n^2}} + \alpha \right)} = n \cdot \frac{(4 - \alpha^2) + \frac{2}{n^2}}{\sqrt{4 + \frac{2}{n^2}} + \alpha}$

και επειδή $\frac{(4 - \alpha^2) + \frac{2}{n^2}}{\sqrt{4 + \frac{2}{n^2}} + \alpha} \rightarrow \frac{4 - \alpha^2}{2 + \alpha}$, $\lim c_n = -\infty$ αν $\alpha > 2$ και $\lim c_n = +\infty$ αν $0 < \alpha < 2$.

Άσκηση 2 (μον. 20)

A) (μον. 4) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο

i) $a_n = \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{n^2}$, ii) $b_n = \left(\frac{\lambda + n}{n + \kappa}\right)^n$ όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι.

B) (μον. 4) Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού w η ακολουθία με γενικό όρο $\left(\frac{w^n}{1 + w^{2n}}\right)$ συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό) και ποιό είναι το αντίστοιχο όριο;

Γ) (μον. 12) Για δύο ακολουθίες (a_n) , (b_n) που είναι θετικών όρων και τείνουν στο άπειρο γράφουμε $(b_n) \ll (a_n)$ και διαβάζουμε: "η (b_n) έχει μικρότερη τάξη από την (a_n) καθώς $n \rightarrow \infty$ ", αν

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Ισχύει επίσης ότι αν (a_n) , (b_n) , (c_n) είναι ακολουθίες θετικών όρων που τείνουν στο άπειρο με

$(b_n) \ll (a_n)$ και $(c_n) \ll (b_n)$, τότε $(c_n) \ll (a_n)$. Να διατάξετε ως προς την σχέση $\ll$ τις ακολουθίες:

$$(n + 2^n), (\sqrt{n + 1}), (n \ln(n + 1)), (n \ln(\ln(n + 2))), (\ln(\ln(n^2 + 1))), n + \ln(n).$$

Λύση 2ης άσκησης

Ai)

Έχουμε ότι $a_n = \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1/3}{n^2}\right)^{n^2}$. Η $\left(1 + \frac{1/3}{n^2}\right)^{n^2}$ είναι υπακολουθία της $\left(1 + \frac{1/3}{k}\right)^k$ για την οποία

γνωρίζουμε ότι συγκλίνει στο $e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$. Επομένως $\lim a_n = \sqrt[3]{e}$.

Aii) $b_n = \left(\frac{\lambda + n}{n + \kappa}\right)^n = \left(\frac{\lambda + n}{n} \cdot \frac{n}{n + \kappa}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{n}}\right]^n = \left[\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa}{n}\right)}\right]^n = \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{\kappa}{n}\right)^n}$

Ομως $\lim \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^\lambda$ και $\lim \left(1 + \frac{\kappa}{n}\right)^n = e^\kappa$, οπότε $\lim b_n = \frac{e^\lambda}{e^\kappa} = e^{\lambda - \kappa}$.

B) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η) $|w| < 1$, οπότε $w^n \rightarrow 0$ και $w^{2n} \rightarrow 0$. Επομένως $\lim a_n = 0$.

2η) $|w| > 1$ οπότε $\left| \frac{1}{w} \right| < 1$, άρα $\left(\frac{1}{w} \right)^n \rightarrow 0$ και $\left(\frac{1}{w} \right)^{2n} \rightarrow 0$, συνεπώς

$$\lim \left(\frac{w^n}{1 + w^{2n}} \right) = \lim \frac{(1/w^n)}{1 + (1/w^{2n})} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

3η) $w = 1$. τότε $\frac{w^n}{1 + w^{2n}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

4η) $w = -1$, τότε $\frac{w^n}{1 + w^{2n}} = \frac{(-1)^n}{1 + (-1)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{1 + 1} = \frac{(-1)^n}{2}$ η οποία δεν συγκλίνει καθώς για τις

υπακολουθίες της a_{2k} , a_{2k+1} ισχύει $a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2} = \frac{1}{2}$ και $a_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2} = -\frac{1}{2}$ (συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια).

Γ)

Ονομάζουμε τους όρους ρων ακολουθιών ως εξής:

$$a_n = n + 2^n, b_n = \sqrt{n+1}, c_n = n \ln(n+1), d_n = n \ln(\ln(n+2)), e_n = \ln(\ln(n^2+1)) \text{ και } f_n = n + \ln(n).$$

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{n + 2^n}{n \ln(n+1)} = \frac{n}{n \ln(n+1)} + \frac{2^n}{n \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{2^n}{n \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{2^{n/2}}{n} \frac{2^{n/2}}{\ln(n+1)}.$$

Υπολογίζουμε τα όρια συναρτήσεων $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x/2}}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^{x/2})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x/2} (\ln 2) / 2}{1} = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x/2}}{\ln(x+1)} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^{x/2})'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x/2} (\ln 2) / 2}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) 2^{x/2} (\ln 2) / 2 = +\infty.$$

Οπότε έχουμε οτι $\lim_{c_n} \frac{a_n}{c_n} = 0 + (+\infty)(+\infty) = +\infty$ και συνεπώς $\boxed{(c_n) \ll (a_n)}.$

$$\frac{c_n}{d_n} = \frac{n \ln(n+1)}{n \ln(\ln(n+2))} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(\ln(n+2))} \text{ και για το όριο θεωρούμε την συνάρτηση}$$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln(x+2))} \text{ και υπολογίζουμε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln(x+2))} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(\ln(\ln(x+2)))'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} (x+1)'}{\frac{1}{\ln(x+2)} (\ln(x+2))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{\ln(x+2)} \frac{1}{x+2} (x+2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2) \ln(x+2)}{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x} \right) \ln(x+2)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x} \right) \ln(x+2)}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)} = +\infty. \text{ Συνεπώς, } \boxed{(d_n) \ll (c_n)}.$$

$$\frac{d_n}{f_n} = \frac{n \ln(\ln(n+2))}{n + \ln(n)} \text{ και για το όριο θεωρούμε την συνάρτηση } \frac{x \ln(\ln(x+2))}{x + \ln(x)} \text{ και υπολογίζουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(\ln(x+2))}{x + \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(\ln(x+2))}{x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x+2))}{1 + \frac{\ln(x)}{x}} = +\infty, \text{καθώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{Επομένως} \quad \boxed{(f_n) \ll (d_n)}.$$

$$\text{Έχουμε } \frac{f_n}{b_n} = \frac{n + \ln(n)}{\sqrt{n+1}} = \frac{n \left(1 + \frac{\ln(n)}{n}\right)}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{\ln(n)}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}. \text{ Όμως } \frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0 \text{ και } \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1. \text{ Άρα}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{b_n} = +\infty. \text{ Συνεπώς, } \boxed{(b_n) \ll (f_n)}.$$

$$\frac{b_n}{e_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(\ln(n^2+1))}. \text{ Όπως παραπάνω υπολογίζουμε το όριο}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(\ln(x^2+1))} &\stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})'}{(\ln(\ln(x^2+1)))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{\ln(x^2+1)} \frac{1}{x^2+1} (x^2+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{\ln(x^2+1)} \frac{2x}{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1) \ln(x^2+1)}{4x\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \ln(x^2+1)}{4x\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \ln(x^2+1)}{4\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = +\infty \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\boxed{(e_n) \ll (b_n)}$ και τελικά έχουμε

$$\boxed{(\ln(\ln(n^2+1))) \ll (\sqrt{n+1}) \ll (n + \ln(n)) \ll (n \ln(\ln(n+2))) \ll (n \ln(n+1)) \ll (n + 2^n)}.$$

Άσκηση 3 (μον. 20)

A) (μον. 10) Δείξτε ότι ορίζεται ακολουθία (a_n) που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$, $n=1,2,\dots$, με $a_1=1$ και εξετάστε την σύγκλισή της σε πραγματικό αριθμό.

Υπόδειξη: δείξτε ότι η ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη.

B) (μον. 10) Δείξτε ότι ορίζεται ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = \frac{2+x_n}{3+x_n}, n=1,2,\dots, \text{ με } x_1=1, \text{ και εξετάστε την σύγκλισή της σε πραγματικό αριθμό.}$$

Υπόδειξη: κάνετε εφαρμογή της μεθόδου προσέγγισης ριζών (σελ. 91) του συγγράμματος αφού επαληθεύσετε τις απαιτούμενες συνθήκες για την συνάρτηση $f(x) = \frac{2+x}{3+x}$, στο διάστημα $[0,2]$.

Λύση 3ης άσκησης

A) Θα αποδείξουμε με την μεθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι για την ακολουθία (a_n) ισχύει:

$0 < a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Για $n=1$ ισχύει αφού $a_1=1$. Έστω ότι για $n=k \geq 1$ ισχύει, δηλαδή $0 < a_k < 3$. Λόγω των

ισοδυναμιών $0 < a_k < 3 \Leftrightarrow 6 < 6+a_k < 9 \Leftrightarrow \sqrt{6} < \sqrt{6+a_k} < 3$ έχουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$

.

αφού $a_{k+1} = \sqrt{6+a_k}$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως αύξουσα δείχνοντας ότι $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+1} = \sqrt{7}$ και $a_1 = 1$, έχουμε ότι $a_1 < a_2$ δηλαδή ισχύει για $n=1$. Έστω ότι ισχύει για $n=k$ δηλαδή $a_k < a_{k+1}$. Τότε $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow a_k + 6 < a_{k+1} + 6 \Leftrightarrow \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{a_{k+1} + 6} \Leftrightarrow a_{k+1} < a_{k+2}$, αφού η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή ισχύει και για $n=k+1$. Άρα $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως η ακολουθία (a_n) συγκλίνει με βάση το θεώρημα της σελίδας 23 του τόμου Α' Λογισμός μιας Μεταβλητής επειδή είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Για το όριό της, a , ισχύει ότι $0 < a \leq 3$ και επίσης είναι λύση της εξίσωσης $a = \sqrt{6+a}$ η οποία συνεπάγεται την $a^2 - a - 6 = 0$ που έχει ρίζες $a = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$.

Τελικά $a=3$ είναι η μόνη ρίζα που ικανοποιεί την $a = \sqrt{6+a}$ και $0 < a \leq 3$, συνεπώς $a_n \rightarrow 3$.

Β) Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,2]$ ως ρητή συνάρτηση με παρονομαστή που δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό. Θα δείξουμε επίσης ότι $f([0,2]) \subseteq [0,2]$ και ότι υπάρχει κ ώστε $|f'(x)| \leq \kappa < 1$ για κάθε x στο διάστημα $(0,2)$ οπότε, από το θεώρημα συστολής, η δεδομένη ακολουθία συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της f , δηλαδή την μοναδική λύση της εξίσωσης $x = f(x)$, στο διάστημα $[0,2]$ (και μάλιστα για οποιοδήποτε τιμή του $x_1 \in [0,2]$).

Υπολογίζουμε την 1η παράγωγο της f : $f'(x) = \left(\frac{2+x}{3+x} \right)' = \frac{(3+x) - (2+x)}{(3+x)^2} = \frac{1}{(3+x)^2}$ και παρατηρούμε ότι

$$0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 3+x \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (3+x)^2 \leq 25 \Leftrightarrow \frac{1}{25} \leq (3+x)^{-2} \leq \frac{1}{9} \text{ στο διάστημα } [0,2].$$

Άρα $|f'(x)| \leq 1/9 < 1$ στο διάστημα $[0,2]$. Λύνοντας την εξίσωση $x = f(x)$ έχουμε: $x = \frac{2+x}{3+x} \Leftrightarrow 3x + x^2 = 2 + x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$. Άρα η ακολουθία συγκλίνει στην ρίζα $x = -1 + \sqrt{3}$ καθώς $-1 - \sqrt{3} < 0$.

Ερώτηση εκτός άσκησης: Είναι δυνατόν να βρεθεί το όριο στο Α) με την μέθοδο του Β) και αντίστροφα;

Άσκηση 4 (μον. 20)

Α) (4 μον.) Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές: i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5+2n+n^{5/2}}$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n}$.

Β) (2 μον.) Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ και στην συνέχεια ένα άνω φράγμα για το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 - n}$.

Γ) (2 μον.) Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)^{1/2}}$ συγκλίνει και να δώσετε εκτίμηση του σφάλματος υπολογισμού του αθροίσματός της από τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=0}^4 (-1)^n \frac{1}{(n+4)^{1/2}}$, $\sum_{n=0}^{21} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^{1/2}}$ διαπιστώνοντας την "αργή" σύγκλιση.

Δ) (12 μον.) Να προσδιοριστεί το διάστημα σύγκλισης καθεμιάς από τις παρακάτω δυναμοσειρές:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}, \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} (x-2)^n.$$

Λύση 4ης άσκησης

A i) Η σειρά είναι θετικών όρων και για τον γενικό όρο έχουμε $\frac{n}{5+2n+n^{5/2}} < \frac{n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Επιπλέον η

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει ως p -σειρά με $p = 3/2 > 1$. Οπότε, από το θεώρημα σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5+2n+n^{5/2}} \text{ συγκλίνει.}$$

A ii) Η σειρά είναι θετικών όρων και για τον γενικό όρο έχουμε $\frac{1}{n 3^n} < \frac{1}{3^n}$. Επιπλέον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο $1/3$ που είναι απολύτως μικρότερος του 1. Οπότε, από το θεώρημα σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n}$ συγκλίνει.

B) Για τον γενικό όρο της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, διασπώντας σε απλά κλάσματα, έχουμε:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right).$$
 Άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \text{ είναι τηλεσκοπική με } b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \text{ και επομένως}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2} \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{4}.$$

Για $n > 1$ έχουμε: $0 < \frac{n^2}{n^4-n} < \frac{n^2}{n^4-n^2} = \frac{1}{n^2-1}$. Επομένως ένα άνω φράγμα της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-n}$ είναι ο

$$\text{αριθμός } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Γ) Για την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{(n+4)^{1/2}}$ που είναι θετικών όρων έχουμε ότι: συγκλίνει στο 0 και

$$\text{είναι γνησίως φθίνουσα καθώς } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+5}}}{\frac{1}{\sqrt{n+4}}} = \sqrt{\frac{n+4}{n+5}} < 1. \text{ Εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibnitz για}$$

εναλλάσσουσες σειρές, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό s και για το σφάλμα προσέγγισης

$$\text{των μερικών αθροισμάτων ισχύει } \left| s - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1} \quad (1).$$

$$\text{Η σχέση (1) για } n=4 \text{ δίνει } \left| s - \sum_{k=0}^4 (-1)^k a_k \right| \leq a_5 = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \text{ και για } n=21, \left| s - \sum_{k=0}^{21} (-1)^k a_k \right| \leq a_{22} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Δ i) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+1}}$ και υπολογίζουμε για το κριτήριο του λόγου

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{(-1)^n x^n} \right| = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}} |x| = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|. \text{ Συνεπώς, αν } |x| < 1 \text{ δηλαδή } -1 < x < 1,$$

η σειρά συγκλίνει και αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Για $x=1$, από το κριτήριο του Leibnitz έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ συγκλίνει αφού η ακολουθία $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

Για $x=-1$, η σειρά γίνεται $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+n}}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ και επειδή για τον γενικό όρο ισχύει ότι $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \frac{n}{1} \rightarrow 1$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n^2+1}}$ αποκλίνει.

Διάστημα σύγκλισης $(-1, 1]$.

ii) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ και υπολογίζουμε για το κριτήριο ρίζας

$$\sqrt[n]{\left| \frac{2^n x^n}{n} \right|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} |x| = 2|x|, \text{ επομένως η σειρά συγκλίνει για κάθε } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ και αποκλίνει}$$

για $|x| > 1/2$. Για $x = \frac{1}{2}$, η σειρά είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει ως $p=1$ σειρά.

Για $x = -\frac{1}{2}$ η σειρά είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία γνωρίζουμε ότι συγκλίνει από το κριτήριο του Leibnitz.

Διάστημα σύγκλισης $[-1/2, 1/2)$.

iii) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} (x-2)^n$ και υπολογίζουμε για το κριτήριο του λόγου

$$\left| \frac{\frac{(n+1)^2}{n+2} (x-2)^{n+1}}{\frac{n^2}{n+1} (x-2)^n} \right| = \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2)} |x-2| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x-2|. \text{ Συνεπώς, αν } |x-2| < 1 \text{ δηλαδή } -1 < x-2 < 1,$$

ισοδύναμα $1 < x < 3$, η σειρά συγκλίνει, ενώ αν $x < 1$ ή $3 < x$ η σειρά αποκλίνει. Για $x=1$ και για $x=3$ η σειρά δεν συγκλίνει καθώς ο γενικός όρος δεν τείνει στο 0.

Διάστημα σύγκλισης $(1, 3)$.

Άσκηση 5 (μον. 20)

A) (μον. 4) Να υπολογιστούν οι πέντε πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Maclaurin της συνάρτησης με τύπο $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (Υπόδειξη: χωρίστε το πολυωνυμικό μέρος της ρητής συνάρτησης και χρησιμοποιήστε γνωστή σειρά Maclaurin).

B) (μον. 4) Να υπολογιστούν οι τέσσερις πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης με τύπο $\frac{1}{x} + \frac{2}{3-x}$ γύρω από το $x=1$.

Γ) (μον. 12) Χρησιμοποιώντας τα γνωστά αναπτύγματα MacLaurin κατάλληλων συναρτήσεων εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους $\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$, $\frac{e^x-1-x}{x^2}$, επεκτείνονται για $x=0$ με τιμή που θα προσδιορίσετε ώστε να είναι αναλυτικές σε διάστημα γύρω από αυτό. Δώστε το ανάπτυγμα Maclaurin και το αντίστοιχο διάστημα σε κάθε περίπτωση που γίνεται η αναλυτική επέκταση στο 0.

Λύση 5ης άσκησης

A) Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ για $|x| < 1$ και καθώς $|x| < 1 \Leftrightarrow |-x^2| < 1$ έχουμε

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Οπότε

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{2x^2}{1+x^2} = 1 - 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - 2x^2 + 2x^4 - 2x^6 + 2x^8 - \dots, \text{ για } |x| < 1.$$

Β) Θέτω $y = x - 1$ οπότε $x = y + 1$ και $\frac{1}{x} + \frac{2}{3-x} = \frac{1}{1+y} + \frac{2}{2-y} = \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-(y/2)}$. Άρα,

για $|y| < 1$ οπότε και $|y/2| < 1$ έχουμε: $\frac{1}{x} + \frac{2}{3-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) y^n =$
 $= 2 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{4}(x-1)^2 - \frac{7}{8}(x-1)^3 + \dots, \text{ για } |x-1| < 1.$

Γ) Για την $\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$: από το διωνυμικό ανάπτυγμα $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ για $|x| < 1$, όπου

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \text{ έχουμε για } \alpha=1/2:$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} + \dots, \quad |x| < 1$$

και αντικαθιστώντας όπου x το $-x$:

$$\sqrt{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k, \quad |x| < 1$$

άρα

$$1 - \sqrt{1-x} = -\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \binom{1/2}{k} x^k = x \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \binom{1/2}{k} x^{k-1}, \quad |x| < 1$$

και για $0 < |x| < 1$, $\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \binom{1/2}{k} x^{k-1}$. Η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \binom{1/2}{k} x^{k-1}$ ορίζει

αναλυτική συνάρτηση για $|x| < 1$ και επιπλέον για $x=0$ παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$.

Άρα η συνάρτηση $\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ επεκτείνεται στο 0 με τιμή $\frac{1}{2}$ και έχει σειρά Maclaurin $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} x^{n-1}$.

Για την $\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$: γνωρίζουμε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επομένως $e^x - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ και συνεπώς για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}. \text{ Άρα}$$

η συνάρτηση $\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ επεκτείνεται στο 0 με τιμή $\frac{1}{2}$ και είναι αναλυτική με σειρά Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$

=====