

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(1)=3$, $f'(1)=5$, $f'(4)=-3$, $g(1)=4$, $g'(1)=-2$. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\frac{f}{g}$, f^2g και $f \circ g$ στο σημείο $x_0=1$.

β) (μον. 8) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής σταθεράς c για τις οποίες η συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \begin{cases} 16-11x, & \text{αν } x \leq 2 \\ cx^3 + c^2x, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Υπάρχει τιμή του c για την οποία η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$;

γ) (μον. 6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $G: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $G(x) = \frac{x+4}{x^2+3x+2}$. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος τάξης n της G δίνεται από τον τύπο $G^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{3}{(x+1)^{n+1}} - \frac{2}{(x+2)^{n+1}} \right)$, για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε $x \neq -1, -2$.

Λύση της 1ης άσκησης

α) Από τον κανόνα του πηλίκου, $\left(\frac{f}{g} \right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g(1)^2} = \frac{5 \cdot 4 - 3 \cdot (-2)}{4^2} = \frac{13}{8}$.

Από τον κανόνα του γινομένου,

$$(f^2g)'(1) = (f^2)'(1)g(1) + f^2(1)g'(1) = 2f(1)f'(1)g(1) + f^2(1)g'(1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 + 3^2 \cdot (-2) = 102.$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας, $(f \circ g)'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(4)g'(1) = (-3) \cdot (-2) = 6$.

β) Αν $x_0 \neq 2$, τότε η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο x_0 , καθώς δίνεται από πολωνυμικό τύπο σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0 . Αρκεί επομένως να βρούμε τις τιμές του c για τις οποίες η F είναι συνεχής ή/και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$.

Έχουμε $F(2) = -6$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (16-11x) = -6$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (cx^3 + c^2x) = 8c + 2c^2$. Για να είναι επομένως η F συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ πρέπει και αρκεί να ισχύει ότι $8c + 2c^2 = -6$, δηλαδή ότι $c^2 + 4c + 3 = 0$. Επομένως, η F είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ αν και μόνο αν $c = -1$ ή $c = -3$.

Αν η F δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Επομένως, αν $c \neq -1, -3$, η F δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$. Θα ελέγξουμε τι ισχύει για $c \in \{-1, -3\}$.

Όποια κι αν είναι η τιμή του c , έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{16 - 11x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-11) = -11$. Αν $c = -1$,

τότε έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^3 + x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(x^2 + 2x + 3)}{x - 2} = -\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x + 3) = -11$,

άρα $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = -11$ και η F είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$. Αν $c = -3$, τότε έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6 - 3x^3 + 9x}{x - 2} = 3 \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 - x)(x^2 + 2x + 1)}{x - 2} = -3 \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x + 1) = -27$, άρα $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2}$ και η F δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$. Επομένως, η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $c = -1$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x \neq -1, -2$, έχουμε ότι $G(x) = \frac{x+4}{x^2+3x+2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} = 3(x+1)^{-1} - 2(x+2)^{-1}$,

άρα $G'(x) = 3(-1)(x+1)^{-2} - 2(-1)(x+2)^{-2} = (-1)^1 1! \left(\frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+2)^2} \right)$, δηλαδή ο ζητούμενος τύπος ισχύει

για $n=1$. Έστω ότι ισχύει για n , δηλαδή ότι $G^{(n)}(x) = (-1)^n n! (3(x+1)^{-(n+1)} - 2(x+2)^{-(n+1)})$. Τότε

$$G^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (3(x+1)^{-(n+1)} - 2(x+2)^{-(n+1)})' = (-1)^n n! (-3(n+1)(x+1)^{-(n+2)} + 2(n+1)(x+2)^{-(n+2)})$$

$$= (-1)^{n+1} (n+1)! (3(x+1)^{-(n+2)} - 2(x+2)^{-(n+2)}) = (-1)^{n+1} (n+1)! \left(\frac{3}{(x+1)^{n+2}} - \frac{2}{(x+2)^{n+2}} \right),$$

άρα ο τύπος ισχύει για $n+1$. Επομένως, από την αρχή της επαγωγής, ο ζητούμενος τύπος ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n .

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x^4 + 23 + \cos(x-1)}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(1, 5)$ και να υπολογιστεί προσεγγιστικά το $f(1.005)$.

β) (μον. 7) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ στο διάστημα $[-4, 4]$.

γ) (μον. 7) Θεωρούμε το σημείο $P = (9, 0)$ του επιπέδου. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $y = 2x^2$ που είναι κοντινότερο στο P .

Λύση της 2ης άσκησης

α) $f'(x) = \frac{4x^3 - \sin(x-1)}{2\sqrt{x^4 + 23 + \cos(x-1)}}$, άρα $f'(1) = \frac{2}{5}$. Επομένως, η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο

σημείο $(1, 5)$ δίνεται από την εξίσωση $y = 5 + \frac{2}{5}(x-1)$. Άρα ο αριθμός $f(1.005)$ είναι προσεγγιστικά ίσος

$$\text{με } 5 + \frac{2}{5}(1.005 - 1) = 5.002.$$

β) Η πολυωνυμική συνάρτηση g είναι παντού παραγωγίσιμη με $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Επομένως τα κρίσιμα σημεία της g στο ανοικτό διάστημα $(-4, 4)$ είναι τα $x=0$ και $x=3$. Έχουμε $g(-4) = 513$, $g(0) = 1$, $g(3) = -26$ και $g(4) = 1$. Επομένως η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της g στο $[-4, 4]$ είναι 513 και -26, αντίστοιχα.

γ) Πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η απόσταση του P από το τυχόν σημείο $(x, 2x^2)$ της καμπύλης, δηλαδή πρέπει να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\sqrt{(x-9)^2 + (2x^2)^2}$, για $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα, πρέπει να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $(x-9)^2 + (2x^2)^2$, για $x \in \mathbb{R}$. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

τύπο $f(x) = (x-9)^2 + (2x^2)^2 = 4x^4 + x^2 - 18x + 81$. Τότε $f'(x) = 16x^3 + 2x - 18 = (x-1)(16x^2 + 16x + 18)$. Όμως $16x^2 + 16x + 18 = (4x+2)^2 + 14 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (εναλλακτικά, ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του τριωνύμου $16x^2 + 16x + 18$ είναι θετικός και η διακρίνουσά του ισούται με $-896 < 0$, άρα το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Επομένως, $f'(x) < 0$ για $x < 1$ και $f'(x) > 0$ για $x > 1$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x=1$. Συμπεραίνουμε ότι το σημείο της καμπύλης $y=2x^2$ που είναι κοντινότερο στο P έχει συντεταγμένες $(1, 2)$.

Παρατήρηση: Αφού $f''(x) = 48x^2 + 2$, το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ελάχιστο της f , διότι $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) = 50 > 0$. Επίσης, από το Θεώρημα Fermat, το x_0 είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο εμφανίζεται τοπικό ακρότατο της f , αφού το x_0 είναι το μόνο σημείο που μηδενίζει την f' . Θα μπορούσαμε επομένως εναλλακτικά να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το εξής γενικό αποτέλεσμα:

Πρόταση: Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό διάστημα I . Αν η f εμφανίζει τοπικό ακρότατο **μόνο** στο σημείο $a \in I$, τότε η f εμφανίζει ολικό ακρότατο στο a .

Απόδειξη: Έστω, χωρίς βλάβη στη γενικότητα, ότι η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο a . Αν το τοπικό αυτό μέγιστο δεν είναι ολικό μέγιστο της f στο I , τότε υπάρχει σημείο $b \in I$ για το οποίο ισχύει $f(a) < f(b)$. Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, έστω ότι $a < b$. Από την υπόθεση για το a υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(c) < f(a)$. Από το Θεώρημα Ακροτάτων Τιμών για την f στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, έπεται η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της σε κάποιο $d \in [a, b]$. Έχουμε $d \neq a$ (διότι $f(c) < f(a)$) και $d \neq b$ (διότι $f(a) < f(b)$). Άρα $d \in (a, b)$ και προφανώς η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο d , άτοπο, αφού $d \neq a$ και η f εμφανίζει τοπικό ακρότατο **μόνο** στο σημείο $a \in I$.

Άσκηση 3 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

α) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{|x - 2|}$$

β) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

γ) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$$

δ) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{(x+4)^x}$$

ε) (μον. 4)
$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x) \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}}$$

στ) (μον. 4)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \cos x + 5}{7x^2 + \sin x}$$

Λύση της 3ης άσκησης

α) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^4 - 16}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^4 - 16}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{2 - x} = - \lim_{x \rightarrow 2-} (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) = -32$ και

$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^4 - 16}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) = 32$. Αφού τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, το όριο δεν υπάρχει.

β) Επειδή $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, έπεται ότι $0 \leq \left| (e^x - 1) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |e^x - 1|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1| = 0$, το Θεώρημα Παρεμβολής δίνει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left| (e^x - 1) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$, άρα συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Παρατήρηση: Γενικότερα, ισχύει ότι το γινόμενο φραγμένης συνάρτησης με μηδενική συνάρτηση είναι μηδενική συνάρτηση. Ακριβέστερα:

Πρόταση: Αν f και g συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο ανοικτό διάστημα I που περιέχει το σημείο a τέτοιες ώστε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ και υπάρχει σταθερά M με $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in I$, τότε $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $0 \leq |f(x)g(x)| \leq M |f(x)|$, για κάθε $x \in I$. Όμως $\lim_{x \rightarrow a} M |f(x)| = 0$, άρα, από το θεώρημα παρεμβολής, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)g(x)| = 0$, επομένως $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \gamma) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital, το

$$\text{ζητούμενο όριο ισούται με } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{(x+4)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x+4} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x+4} \right)^{x+4}}{\left(1 - \frac{3}{x+4} \right)^4} = \frac{e^{-3}}{(1-0)^4} = \frac{1}{e^3}.$$

$$\text{Εναλλακτικά, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{(x+4)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(x+1)^x}{x^x}}{\frac{(x+4)^x}{x^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{4}{x} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^4} = \frac{1}{e^3}.$$

$$\text{Εναλλακτικά, } \frac{(x+1)^x}{(x+4)^x} = e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right)}. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x}}\right) = \ln(1) = 0, \text{ το όριο}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right)}{\frac{1}{x}} \text{ είναι απροσδιόριστη μορφή } \frac{0}{0}, \text{ άρα, από τον κανόνα L'Hôpital, ισούται}$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}}{-\frac{1}{x^2}} = -3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 5x + 4} = -3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} = -3. \text{ Συνεπώς, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{(x+4)^x} = e^{-3}.$$

ε) Θέτοντας $y = \sqrt{x}$, έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\sin(y)}{y} = 1$. Επίσης το όριο $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ είναι

απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{2}{1+2x}}{1} = 2$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x) \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2 \cdot 1 = 2$.

στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \cos x + 5}{7x^2 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x} + \frac{5}{x^2}}{7 + \frac{\sin x}{x^2}}$. Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$. Επίσης, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και

$|\cos x|, |\sin x| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η παρατήρηση στη λύση του υποερωτήματος β) δείχνει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \cos x + 5}{7x^2 + \sin x} = \frac{1+0+0}{7+0} = \frac{1}{7}$.

Άσκηση 4 (Μον. 20) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

α) (μον. 5) Να υπολογιστεί η παράγωγος της f , να προσδιοριστούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά ακρότατα της f .

β) (μον. 5) Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της f , να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .

γ) (μον. 5) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ασύμπτωτες (οριζόντιες, κατακόρυφες ή πλάγιες) της γραφικής παράστασης της f .

δ) (μον. 5) Έστω $g: [3, +\infty) \rightarrow f([3, +\infty))$ ο περιορισμός της f στο διάστημα $[3, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί τύπος για την g^{-1} .

Λύση της 4ης άσκησης

α) Στο $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ έχουμε $f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2 - 4x + 5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$. Εναλλακτικά,

$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} = x - 2 + \frac{1}{x - 2}$, άρα $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$. Επομένως, το $f'(x)$ έχει θετικό πρόσημο για $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ και αρνητικό πρόσημο για $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2)$, γνησίως φθίνουσα στο $(2, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$. Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = 1$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 3$.

β) Έχουμε $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right)' = \frac{2}{(x-2)^3}$, άρα $f''(x) < 0$ για $x < 2$ και $f''(x) > 0$ για $x > 2$. Συνεπώς

η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτή στο $(2, +\infty)$. Σημεία καμπής δεν υπάρχουν: σημειώνουμε ότι το σημείο $x = 2$ δεν είναι σημείο καμπής της f καθώς δεν ανήκει καν στο πεδίο ορισμού της f (βλ. Ορισμός

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, άρα οι ευθείες $x=a$ για $a \neq 2$ δεν μπορεί να είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . Αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x - 2 + \frac{1}{x-2} \right) = 0 - \infty = -\infty$, η ευθεία $x=2$ είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (ισχύει επίσης ότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x-2} \right) = 0 + \infty = +\infty$).

Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x-2} \right) = +\infty + 0 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x-2} \right) = -\infty + 0 = -\infty$, δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \right) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \right) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -2.$$

Άρα η ευθεία $y = x - 2$ είναι η μοναδική πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (στο $+\infty$ και στο $-\infty$).

δ) Αφού, από τη λύση του πρώτου υποερωτήματος, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$, έπεται ότι η g είναι 1-1. Λόγω μονοτονίας και συνέχειας της g και επειδή $g(3) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, το σύνολο τιμών $f([3, +\infty))$ της g ισούται με $[2, +\infty)$. Ορίζεται επομένως η $g^{-1}: [2, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$. Για να υπολογίσουμε το $g^{-1}(x)$, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για $x \geq 2$ και $y \geq 3$ η ισότητα $g^{-1}(x) = y$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα $g(y) = x$, δηλαδή με την $\frac{y^2 - 4y + 5}{y - 2} = x$, η οποία σημαίνει ότι το y είναι λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $y^2 - (x+4)y + (2x+5) = 0$.

Έστω $x > 2$. Η διακρίνουσα ισούται με $x^2 - 4 > 0$ (καθώς $x > 2$) και οι δύο πραγματικές λύσεις της εξίσωσης είναι $\frac{x+4 \pm \sqrt{x^2-4}}{2}$. Αν ίσχυε ότι $g^{-1}(x) = \frac{x+4 - \sqrt{x^2-4}}{2}$, τότε $x+4 - \sqrt{x^2-4} \geq 6$ (καθώς $y \geq 3$), άρα $x-2 \geq \sqrt{x^2-4}$, συνεπώς $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \geq x^2 - 4$, το οποίο σημαίνει ότι $x \leq 2$, άτοπο.

Επομένως, αναγκαστικά, $g^{-1}(x) = \frac{x+4 + \sqrt{x^2-4}}{2}$ για κάθε $x > 2$. Αφού προφανώς $g^{-1}(2) = 3$, έπεται ότι $g^{-1}(x) = \frac{x+4 + \sqrt{x^2-4}}{2}$, για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 5) Έστω $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $F(0) = 5$ και $F'(x) \leq 3$, για κάθε $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι $F(x) \leq 3x + 5$, για κάθε $x \geq 0$.

β) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $2x = \cos x$.

γ) (μον. 5) Έστω $a \in (1, +\infty)$ και $M \in [0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι κάθε συνάρτηση $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|G(x) - G(y)| \leq M|x - y|^a$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να αποδειχθεί ότι η G είναι παραγωγίσιμη με μηδενική παράγωγο).

δ) (μον. 5) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Υπόδειξη: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (f(x) - \sin x)^2 + (f'(x) - \cos x)^2$ έχει μηδενική παράγωγο).

Λύση της 5ης άσκησης

α) Έστω $G(x) = F(x) - 3x$. Προφανώς $G'(x) = F'(x) - 3 \leq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η G είναι φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Επομένως $G(x) \leq G(0) = 5$, για κάθε $x \geq 0$, δηλαδή $F(x) \leq 3x + 5$, για κάθε $x \geq 0$. Εναλλακτικά, η ζητούμενη ανισότητα ισχύει προφανώς για $x = 0$. Αν τώρα $x > 0$, το Θεώρημα Μέσης τιμής για την F στο διάστημα $[0, x]$ δίνει $F(x) = F(0) + xF'(\xi)$, για κάποιο $\xi \in (0, x)$. Επομένως, αφού $F'(\xi) \leq 3$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) \leq 5 + 3x$.

β) Έστω $f(x) = 2x - \cos x$. Επειδή $f(0) = -1 < 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi > 0$, υπάρχει από το Θεώρημα Bolzano (ή

γενικότερα από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών), λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Αφού $f'(x) = 2 + \sin x \geq 2 - 1 = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς άλλη λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να υπάρχει.

Εναλλακτικά, για τη μοναδικότητα της ρίζας, έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες, τις ρ_1, ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$. Αφού η f είναι προφανώς συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , το θεώρημα Rolle συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιου $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(\xi) = 0$. Αλλά $f'(\xi) = 2 + \sin \xi \geq 2 - 1 = 1 > 0$, άτοπο.

γ) Για $x_0 \in \mathbb{R}$, η σχέση $\left| \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M|x - x_0|^{a-1}$ δίνει $-M|x - x_0|^{a-1} \leq \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} \leq M|x - x_0|^{a-1}$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $a \in (1, +\infty)$, έχουμε ότι $a - 1 > 0$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} M|x - x_0|^{a-1} = 0$. Από το Θεώρημα

Παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = 0$. Από τον ορισμό της παραγώγου, αυτό σημαίνει ότι η G είναι

παραγωγίσιμη στο x_0 με $G'(x_0) = 0$. Αυτό ισχύει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, επομένως η G είναι σταθερή.

δ) Ακολουθώντας την υπόδειξη και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, έχουμε ότι

$g'(x) = 2(f(x) - \sin x)(f'(x) - \cos x) + 2(f'(x) - \cos x)(f''(x) + \sin x) = 2(f'(x) - \cos x)(f(x) + f''(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι σταθερή. Αφού $g(0) = 0$, έπεται ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(f(x) - \sin x)^2 + (f'(x) - \cos x)^2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $(f(x) - \sin x)^2 \geq 0$ και $(f'(x) - \cos x)^2 \geq 0$, έπεται ότι πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $(f(x) - \sin x)^2 = (f'(x) - \cos x)^2 = 0$. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι $f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.