

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	07/02/2018 23:59μμ
Ακ. Έτος	2017-18	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	3	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

Ημερομηνία ανάρτησης:	Σάββατο	30 Δεκεμβρίου 2017
Ημερομηνία παράδοσης:	Κυριακή	04 Φεβρουαρίου 2018
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	07 Φεβρουαρίου 2018 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Παρασκευή	09 Φεβρουαρίου 2018

Πριν από τη λύση των ασκήσεων να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 2.1 (πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής)

Ενότητα 4 (όριο και συνέχεια συνάρτησης)

Ενότητα 5 (παράγωγος)

Ενότητα 6 (βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)

Ενότητα 7 (ακρότατα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να μελετηθεί επίσης το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στο study.eap.gr:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός

- Σύνολα Αριθμών,
- Συναρτήσεις,
- Όρια-Συνέχεια,
- Παράγωγοι,
- Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και κατανόηση:

- της έννοιας της πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής,
- των εννοιών του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων, καθώς και των σχετικών ιδιοτήτων
- της παραγώγου (πρώτης και ανώτερης τάξης) και των κανόνων παραγώγισης,
- των βασικών θεωρημάτων του διαφορικού λογισμού και
- των εφαρμογών αυτών στον υπολογισμό ορίων, στην εύρεση ακρότατων τιμών, στη μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης και στη μελέτη εξισώσεων και ανισοτήτων.

Να διαβαστούν προσεκτικά οι εκφωνήσεις και να αιτιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης της Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

- i) (μον. 4) Δίνεται η συνάρτηση $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $q(x) = x^3 + 2$. Να βρεθεί τύπος για τη συνάρτηση $h = q \circ q$ και να υπολογιστεί η παράγωγος τάξης 10 της h .
- ii) (μον. 6) Δίνεται η συνάρτηση $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $p(x) = 2x^5 + 1$. Να αποδειχθεί ότι η p είναι 1-1 και επί και να βρεθεί τύπος για την αντίστροφη συνάρτηση p^{-1} . Να εξηγηθεί γιατί η p^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a = 65$ και να υπολογιστεί η παράγωγος της p^{-1} στο σημείο αυτό. Υπάρχουν σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η p^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη;
- iii) (μον. 6) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 8 - x, & \text{αν } 1 < x \leq 2 \\ 6x - x^2 - 2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$.
- Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ είναι η f συνεχής στο σημείο a ; Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ είναι η f παραγωγίσιμη στο σημείο a ;
- iv) (μον. 4) Δίνεται η συνάρτηση $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$. Για κάθε θετικό ακέραιο n , να βρεθεί τύπος για την παράγωγο τάξης n της g .

Λύση της 1ης άσκησης

i) Έχουμε $h(x) = q(q(x)) = q(x^3 + 2) = (x^3 + 2)^3 + 2 = x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 8 + 2 = x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 10$. Αφού η h είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 9, έπεται ότι $h^{(10)}(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν $p(x_1) = p(x_2)$, τότε $2x_1^5 + 1 = 2x_2^5 + 1$, άρα $x_1^5 = x_2^5$, το οποίο σημαίνει ότι $x_1 = x_2$. Επομένως η p είναι 1-1. Αν $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $y = 2x^5 + 1$ έχει λύση $x = \sqrt[5]{\frac{y-1}{2}}$, άρα η p είναι επί. Από τους παραπάνω

υπολογισμούς, έπεται ότι η p^{-1} δίνεται από τον τύπο $p^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{x-1}{2}} = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$. Αφού ο εκθέτης $\frac{1}{5}$ είναι

μικρότερος του 1 και είναι ρητός αριθμός με περιττό παρονομαστή, έπεται ότι η συνάρτηση p^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\frac{a-1}{2} \neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $a \neq 1$. Στην περίπτωση

αυτή, έχουμε $(p^{-1})'(a) = \frac{1}{10} \left(\frac{a-1}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}$. Ειδικότερα, $(p^{-1})'(65) = \frac{1}{10} \cdot 32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{160}$.

Εναλλακτικά, η πολυωνυμική συνάρτηση p είναι παντού παραγωγίσιμη και η παράγωγός της δίνεται από τον τύπο $p'(x) = 10x^4$, άρα μηδενίζεται μόνο για $x = 0$. Από τη θεωρία επομένως προκύπτει ότι η p^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ εκτός από το $p(0) = 1$. Ειδικότερα, η p^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο

σημείο $a = 65$ και, αφού $p^{-1}(65) = 2$, έπεται ότι $(p^{-1})'(65) = \frac{1}{p'(p^{-1}(65))} = \frac{1}{p'(2)} = \frac{1}{10 \cdot 2^4} = \frac{1}{160}$.

iii) Αν $a \neq 1, 2$, τότε η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο a διότι δίνεται από πολυωνυμικό τύπο σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το a . Μένει να ελέγξουμε αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα σημεία $a = 1$ και $a = 2$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (8 - x) = 7$. Άρα η f δεν είναι συνεχής, επομένως ούτε και παραγωγίσιμη, στο σημείο $a = 1$.

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8-x) = 6$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6x-x^2-2) = 6$ και $f(2) = 6$, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $a = 2$. Τέλος, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8-x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{x-2} = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6x-x^2-2-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6x-x^2-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(4-x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4-x) = 2$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a = 2$.

iv) Έχουμε $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, για κάθε $x \in (0, \infty)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής για να

δείξουμε ότι $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{\frac{1}{2}-n}$, για κάθε φυσικό $n \geq 2$ και για κάθε $x \in (0, \infty)$. Για

$n = 2$, έχουμε $g''(x) = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} = (-1)^{2-1} \frac{1}{2^2} x^{\frac{1}{2}-2}$. Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για n , δηλαδή

ότι $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{\frac{1}{2}-n}$. Τότε

$$g^{(n+1)}(x) = \left((-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{\frac{1}{2}-n} \right)' = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} \left(\frac{1}{2} - n \right) x^{\frac{1}{2}-n-1} = (-1)^{(n+1)-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2(n+1)-3)}{2^{n+1}} x^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

άρα ο ισχυρισμός ισχύει και για $n+1$. Επομένως, ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

i) (μον. 5) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 15}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(1, 9)$. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά ο αριθμός $f(0.99)$.

ii) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι η μόνη πραγματική σταθερά c για την οποία $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1 - ch}{h} = 0$

είναι η $c = 2$. Ποιά από τις ευθείες του επιπέδου που περνούν από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ προσεγγίζει καλύτερα την καμπύλη $y = \tan(x)$, για x κοντά στο $\frac{\pi}{4}$;

iii) (μον. 5) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 25$ στο διάστημα $[1, 4]$.

iv) (μον. 5) Δίνονται θετικός ακέραιος n και πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$. Να αποδειχθεί ότι η παράσταση $(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_n)^2$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν ο x είναι ο αριθμητικός μέσος των $a_1, a_2, \dots, a_n$, δηλαδή όταν $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Λύση της 2ης άσκησης

i) $f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 3} - (x^3 + 2x^2 + 15) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3} = \frac{2x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 3x}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}$, άρα $f'(1) = \frac{5}{4}$. Επομένως, η

εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(1, 9)$ δίνεται από την εξίσωση $y = 9 + \frac{5}{4}(x-1)$. Άρα ο

αριθμός $f(0.99)$ είναι προσεγγιστικά ίσος με $9 + \frac{5}{4}(0.99-1) = 8.9875$.

ii) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = \tan(x)$ στο σημείο $\frac{\pi}{4}$, έχουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \frac{\pi}{4}} = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Άρα, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1 - ch}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch}{h} = 2 - c$. Επομένως, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1 - ch}{h} = 0$ αν και μόνο αν $c = 2$.

Από τη θεωρία (π.χ. Ενότητα 5.4 στο σύγγραμμα του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου), μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι, από τις ευθείες του επιπέδου που περνάνε από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, εκείνη

που προσεγγίζει καλύτερα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \tan(x)$, για x κοντά στο $\frac{\pi}{4}$,

είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, δηλαδή η ευθεία $y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Παρατήρηση: Η γενική αρχή από την οποία προκύπτει το τελευταίο συμπέρασμα αναφέρεται στη θεωρία, αλλά η δικαιολόγηση που δίνεται είναι διαισθητική και όχι αυστηρή, μιας και απουσιάζει η ακριβής διατύπωση του τι σημαίνει «καλύτερη προσέγγιση της καμπύλης από ευθεία». Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, ο υπολογισμός της σταθεράς c δίνει μια σχετική εξήγηση:

Κάθε μη κατακόρυφη ευθεία του επιπέδου που περνά από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ έχει εξίσωση $y = 1 + c\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

για κάποιο πραγματικό αριθμό c , δηλαδή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $l(x) = 1 + c\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Για να επιτευχθεί η «καλύτερη προσέγγιση», το ζητούμενο είναι να βρεθεί η τιμή του

c για την οποία το $|f(x) - l(x)|$, δηλαδή το $\left|\tan(x) - 1 - c\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$, είναι όσο το δυνατόν μικρότερο σε

σχέση με το $\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$, όταν η ποσότητα $x - \frac{\pi}{4}$ τείνει στο 0. Με άλλα λόγια, θέτοντας $h = x - \frac{\pi}{4}$, θέλουμε το

κλάσμα $\frac{\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1 - ch\right|}{|h|}$ να γίνεται όσο το δυνατόν μικρότερο καθώς το h τείνει στο 0. Επειδή, όπως

δείξαμε παραπάνω, το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - 1 - ch\right|}{|h|}$ ισούται με 0 όταν $c = 2$, ενώ για $c \neq 2$ ισούται με

$|2 - c| > 0$, έπεται ότι η ζητούμενη «βέλτιστη» ευθεία δίνεται από την εξίσωση $y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, δηλαδή είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο συγκεκριμένο σημείο.

iii) Η g είναι παντού παραγωγίσιμη (ως πολωνυμική) με $g'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x - 2)(x - 6)$. Άρα το μοναδικό σημείο στο διάστημα $[1, 4]$ όπου μηδενίζεται η παράγωγος της g είναι το $x = 2$. Επειδή $g(1) = 0$, $g(2) = 7$ και $g(4) = -9$, έπεται ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της g στο διάστημα $[1, 4]$ είναι 7 και -9, αντίστοιχα.

iv) Θεωρούμε την πολωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_n)^2$.

Αφού $f'(x) = 2(x-a_1) + 2(x-a_2) + \dots + 2(x-a_n) = 2n \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$, το οποίο είναι αρνητικό για

$x < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ και θετικό για $x > \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, έπεται, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, ότι η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$\left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, +\infty \right)$, επομένως λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Εναλλακτικά, αφού $f(x) = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$, έπεται ότι

$$f(x) = n \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \right) \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n},$$

άρα το $f(x)$ γίνεται ελάχιστο και ίσο με $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}$ όταν $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Παρατήρηση: Το σημείο $x_0 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ είναι τοπικό ελάχιστο της f , διότι $f'(x_0) = 0$ και

$f''(x_0) = 2n > 0$. Επίσης, από το Θεώρημα Fermat, το x_0 είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο εμφανίζεται τοπικό ακρότατο της f , αφού το x_0 είναι το μόνο σημείο που μηδενίζει την f' . Θα μπορούσαμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε το εξής γενικό αποτέλεσμα:

Πρόταση: Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό διάστημα I . Αν η f εμφανίζει τοπικό ακρότατο **μόνο** στο σημείο $a \in I$, τότε η f εμφανίζει ολικό ακρότατο στο a .

Απόδειξη: Έστω, χωρίς βλάβη στη γενικότητα, ότι η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο a . Αν το τοπικό αυτό μέγιστο δεν είναι ολικό μέγιστο της f στο I , τότε υπάρχει σημείο $b \in I$ για το οποίο ισχύει $f(a) < f(b)$. Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, έστω ότι $a < b$. Από την υπόθεση για το a υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(c) < f(a)$. Από το Θεώρημα Ακροτάτων Τιμών για την f στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, έπεται η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της σε κάποιο $d \in [a, b]$. Έχουμε $d \neq a$ (διότι $f(c) < f(a)$) και $d \neq b$ (διότι $f(a) < f(b)$). Άρα $d \in (a, b)$ και προφανώς η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο d , άτοπο, αφού $d \neq a$ και η f εμφανίζει τοπικό ακρότατο **μόνο** στο σημείο $a \in I$.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

i) (μον. 2)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$$

ii) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 17}{\sqrt{9x^2 + 6x}}$$

iii) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2 \cos(x - \pi)}{x^3 - \pi x^2}$$

iv) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 12x)^{\frac{1}{3x}}$$

v) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 7x + 5} - \sqrt{x^2 + 6x})$$

vi) (μον. 3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^{200}}{x^{199} \sin(4x)}$$

vii) (μον. 3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^6 + 3x^4 + 18x^2} \cos(1+x^{-100})$$

Λύση της 3ης άσκησης

i) Από τον ορισμό της παραγώγου, το ζητούμενο όριο είναι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στο σημείο $x=1$. Αφού $f'(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $f'(1) = e$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = e$.

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+17}{\sqrt{9x^2+6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+\frac{17}{x}}{\sqrt{9+\frac{6}{x}}} = \frac{5+0}{\sqrt{9+0}} = \frac{5}{3}.$$

iii) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital, το ζητούμενο όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2x + \pi^2 \sin(x - \pi)}{3x^2 - 2\pi x} = \frac{2\pi}{\pi^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2 \cos(x - \pi)}{x^3 - \pi x^2} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2 + \pi^2 (1 - \cos(x - \pi))}{x^2(x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{x^2(x - \pi)} + \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2 (1 - \cos(x - \pi))}{x^2(x - \pi)} \\ \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x + \pi}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2}{x^2} \frac{1 - \cos(x - \pi)}{x - \pi} &= \frac{2\pi}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{\pi^2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos(x - \pi)}{x - \pi} = \frac{2}{\pi} + \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos(x - \pi)}{x - \pi}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = x - \pi$, έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos(x - \pi)}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(t))(1 + \cos(t))}{t(1 + \cos(t))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(t)}{t(1 + \cos(t))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t)}{t(1 + \cos(t))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(t)} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2 \cos(x - \pi)}{x^3 - \pi x^2} = \frac{2}{\pi} + 0 = \frac{2}{\pi}.$

iv) Θέτοντας $t = \frac{1}{3x}$, το ζητούμενο όριο ισούται με $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{t}\right)^t = e^4.$

Εναλλακτικά, $\lim_{x \rightarrow 0+} (1+12x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{\ln(1+12x)}{3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+12x)}{3x}}$, λόγω συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης. Το

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+12x)}{3x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital, ισούται με $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4}{1+12x} = 4,$

άρα $\lim_{x \rightarrow 0+} (1+12x)^{\frac{1}{3x}} = e^4.$

$$\begin{aligned} \text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 7x + 5} - \sqrt{x^2 + 6x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 7x + 5} - \sqrt{x^2 + 6x})(\sqrt{x^2 + 7x + 5} + \sqrt{x^2 + 6x})}{\sqrt{x^2 + 7x + 5} + \sqrt{x^2 + 6x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 7x + 5})^2 - (\sqrt{x^2 + 6x})^2}{\sqrt{x^2 + 7x + 5} + \sqrt{x^2 + 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 7x + 5 - (x^2 + 6x)}{\sqrt{x^2 + 7x + 5} + \sqrt{x^2 + 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 7x + 5} + \sqrt{x^2 + 6x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{6}{x}}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

vi)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^{200}}{x^{199} \sin(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)^{200}}{x^{200}} \cdot \frac{x}{\sin(4x)} \right) = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{200} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin(4x)} \stackrel{t=4x}{=} \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)^{200} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sin(t)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 1^{200} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}.$$

vii) Επειδή $|\cos(1+x^{-100})| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, έπεται ότι

$$0 \leq \left| \sqrt{x^6 + 3x^4 + 18x^2} \cos(1+x^{-100}) \right| \leq \sqrt{x^6 + 3x^4 + 18x^2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^6 + 3x^4 + 18x^2} = 0,$$

το θεώρημα παρεμβολής συνεπάγεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \sqrt{x^6 + 3x^4 + 18x^2} \cos(1+x^{-100}) \right| = 0$, επομένως έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^6 + 3x^4 + 18x^2} \cos(1+x^{-100}) = 0.$$

Παρατήρηση: Γενικότερα, ισχύει ότι το γινόμενο φραγμένης συνάρτησης με μηδενική συνάρτηση είναι μηδενική συνάρτηση. Ακριβέστερα:

Πρόταση: Αν f και g συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο ανοικτό διάστημα I που περιέχει το σημείο a τέτοιες ώστε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ και υπάρχει σταθερά M με $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in I$, τότε $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$, για κάθε $x \in I$. Όμως $\lim_{x \rightarrow a} M|f(x)| = 0$, άρα, από το θεώρημα παρεμβολής, έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)g(x)| = 0$, επομένως $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2}$.

i) (μον. 5) Να υπολογιστεί η παράγωγος της f , να προσδιοριστούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά ακρότατα της f .

ii) (μον. 5) Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της f , να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .

iii) (μον. 5) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ασύμπτωτες (οριζόντιες, κατακόρυφες ή πλάγιες) της γραφικής παράστασης της f .

iv) (μον. 5) Έστω g ο περιορισμός της f στο διάστημα $(-\infty, 0)$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι 1-1 και να βρεθεί το σύνολο τιμών της g .

Λύση της 4ης άσκησης

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $f'(x) = \left(x + \frac{9}{x^2} \right)' = 1 - \frac{18}{x^3}$, το οποίο έχει θετικό πρόσημο για $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{18}, +\infty)$ και αρνητικό πρόσημο για $x \in (0, \sqrt[3]{18})$. Επομένως, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0, \sqrt[3]{18}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt[3]{18}, +\infty)$. Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = \sqrt[3]{18}$. Δεν υπάρχουν τοπικά μέγιστα της f .

ii) Έχουμε $f'(x) = \left(1 - \frac{18}{x^3}\right)' = \frac{54}{x^4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Επομένως, $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Δεν υπάρχει σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

iii) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, άρα οι κατακόρυφες ευθείες $x = a$ για $a \neq 0$ δεν μπορεί να είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . Όμως $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{9}{x^2}\right) = 0 + \infty = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{9}{x^2}\right) = 0 + \infty = +\infty$. Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (και οι τιμές της f τείνουν στο $+\infty$ τόσο από τα αριστερά όσο και από τα δεξιά της κατακόρυφης ασύμπτωτης).

Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{9}{x^2}\right) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$, δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{9}{x^3}\right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{9}{x^3}\right) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x^2} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 1 \cdot x - 0$, δηλαδή η $y = x$, είναι η μοναδική πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (στο $+\infty$ και στο $-\infty$).

iv) Αφού, από τη λύση του πρώτου υποερωτήματος, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, έπεται ότι η g είναι 1-1. Επίσης, αφού η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{9}{x^2}\right) = +\infty$, το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της g είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

i) (μον. 4) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $7x^6 - 8x + 2 = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές λύσεις.

ii) (μον. 4) Έστω $x \in (0, +\infty)$. Δείξτε ότι $(1+x)^a > 1+ax$ αν $a > 1$, ενώ $(1+x)^a < 1+ax$ αν $0 < a < 1$ (Υπόδειξη: Θεώρημα Μέσης Τιμής).

iii) (μον. 4) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι ισότητες $f(0) = 0$ και $f'(x) = 1 + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Υπόδειξη: να δείχθεί ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{1+f(x)}{e^x}$ έχει μηδενική παράγωγο).

iv) (μον. 4) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

v) (μον. 4) Να λυθεί η εξίσωση $e^x = x^e$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (Υπόδειξη: προηγούμενο υποερώτημα).

Λύση της 5ης άσκησης

i) Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 7x^6 - 8x + 2$ είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f(0) = 2 > 0$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{121}{64} < 0$, υπάρχει, από το Θεώρημα του Bolzano (ή πιο γενικά από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών), λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Με όμοιο τρόπο, αφού $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{121}{64} < 0$ και $f(1) = 1 > 0$, υπάρχει, από το Θεώρημα του Bolzano (ή πιο γενικά από το Θεώρημα

Ενδιαμέσων Τιμών), λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$

έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές λύσεις. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει τρίτη λύση. Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, έστω ότι a, b, c ήταν τρεις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $a < b < c$. Από το Θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα είχε τουλάχιστον μία πραγματική λύση στο διάστημα (a, b) και τουλάχιστον μία πραγματική λύση στο διάστημα (b, c) . Αυτό είναι άτοπο, διότι $f'(x) = 42x^5 - 8$ και η μόνη πραγματική λύση της εξίσωσης $42x^5 - 8 = 0$ είναι $x = \sqrt[5]{\frac{4}{21}}$.

Εναλλακτικά, θέτοντας $x_0 = \sqrt[5]{\frac{4}{21}}$, εύκολα βλέπουμε ότι $f'(x) < 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x > x_0$.

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Από το Παράδειγμα 2, υποενότητα 5.2.15, σελίδες 36-37, στο αρχείο **oria-synexeia.pdf** του Συνοδευτικού Εκπαιδευτικού Υλικού (ΣΕΥ) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επομένως, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και τη μονοτονία της f στα διαστήματα $(-\infty, x_0]$ και $[x_0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι $f((-\infty, x_0]) = f([x_0, +\infty)) = [f(x_0), +\infty)$. Επίσης, $f(x_0) = 2 - \frac{20}{3} \sqrt[5]{\frac{4}{21}} < 0$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία στο διάστημα $(-\infty, x_0)$ και μία στο διάστημα $(x_0, +\infty)$.

ii) Η συνάρτηση με τύπο $f(t) = (1+t)^a$ είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$, δηλαδή $(1+x)^a - 1 = a(1+\xi)^{a-1}x$. Αφού $1+\xi > 1$, έχουμε ότι $(1+\xi)^{a-1} > 1$ αν $a > 1$, ενώ $(1+\xi)^{a-1} < 1$ αν $0 < a < 1$. Επομένως, $(1+x)^a > 1+ax$ αν $a > 1$, ενώ $(1+x)^a < 1+ax$ αν $0 < a < 1$.

Σημείωση: Οι ανισότητες αυτές είναι γνωστές ως ανισότητες Bernoulli.

iii) Ακολουθώντας την υπόδειξη, έχουμε ότι $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x(1+f(x))}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - 1 - f(x)}{e^x} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή. Αφού $g(0) = \frac{1+f(0)}{e^0} = 1$, έπεται ότι $g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) = e^x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Η συνάρτηση h είναι προφανώς παντού παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με παράγωγο που δίνεται

από τον τύπο $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Αφού $x^2 > 0$, για κάθε $(0, +\infty)$, έπεται ότι το πρόσημο του $h'(x)$ είναι θετικό όταν $\ln(x) < 1$ και αρνητικό όταν $\ln(x) > 1$. Άρα, από το Θεώρημα μέσης Τιμής, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Συνεπώς η τιμή $h(x)$ μεγιστοποιείται στο διάστημα $(0, +\infty)$ όταν $x = e$ και η μέγιστη αυτή τιμή ισούται με $h(e) = \frac{1}{e}$.

Εναλλακτικά, έχουμε $h'(x) = 0$ μόνο αν $x = e$. Επίσης $h''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$, άρα

$h''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$. Άρα η h εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο e . Από το Θεώρημα Fermat, αυτό είναι το μόνο τοπικό ακρότατο της h στο $(0, +\infty)$. Επομένως, από την Πρόταση στο τέλος της λύσης της Άσκησης 2, έπεται ότι η h εμφανίζει ολικό μέγιστο μόνο για $x = e$.

ν) Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $x = e$. Πράγματι, παίρνοντας λογαρίθμους και στα δύο μέρη της εξίσωσης, έχουμε $x = e \ln(x)$, δηλαδή $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{e}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε λύση x της εξίσωσης η τιμή $h(x)$ της συνάρτησης h του προηγούμενου υποερωτήματος θα είναι η μέγιστη δυνατή. Όμως, η $h(x)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της μόνο όταν $x = e$.