

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ΠΛΗ 12
3^η Εργασία 2016-2017

Σύνταξη – επιμέλεια

Παντελής . Π . Προδρομίδης

Σολωμού 29 Αθήνα

τηλ. 6942047218

email p27prodromidis@gmail.com

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 1. Λύση: Α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη σε κάθε μέρος της, ως περιορισμός -
- πολυωνυμικής για $x > 0$ - εκθετικής συνάρτησης για $x < 0$

Άρα για να είναι η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$ πρέπει και αυτή να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

στο $x = 0$. Για την συνέχεια στο $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (1)$$

Έχουμε δικτοχικά

$$x < 0 : \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$$

$$x > 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + \beta x + \gamma) = \gamma$$

$$x = 0 : f(0) = \alpha$$

$$\text{οπότε η (1) δίνει } 1 = \gamma = \alpha \quad (2)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Π12 τήν Παραγωγισιμότητα στο $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad (3)$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - a}{x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \beta x + \gamma - a}{x} = (a = \gamma)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \beta x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + \beta)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \beta) = \beta$$

Συνεπώς από (3) $\beta = 1$

Τελικά η f είναι παραγωγισιμή $\forall$ $x \in \mathbb{R}$ ^{άρα και συνεπώς} _{στο $x=0$} το $\mathbb{R}$

όταν $\alpha = \beta = \gamma = 1$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) i/ Για να οριστεί η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 8 \ln x$$

πρέπει $x > 0$ Οπότε $D_f = (0, +\infty)$

Η πρώτη παράγωγος είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 8 \ln x)' = (x^2)' - 8(\ln x)' \\ &= 2x - 8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} \end{aligned}$$

και το πρόσημό της είναι το πρόσημο του αριθμητή

καθώς ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός επομένως

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8}{x} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 > 8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

Δεύτερο διάστημα $2 < x < +\infty$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8}{x} < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 < 8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Ταυτό διάστημα $0 < x < 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2 \quad \text{Ταύτη } x = 2$$

Πίνακας προσηλώτων της $f'(x)$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

∴ Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ορίζεται και

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2/2} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(-\frac{x^2}{2} \right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot x \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ αφού}$$

$$e^{-x^2/2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ αφού } e^{-x^2/2} > 0$$

Το πρόσημο της 1^{ης} παραγώγου φαίνεται στον

ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$

Γ) Έχουμε Διαδοχικά

$$h(x) = \sin(3x)$$

$$h'(x) = (\sin(3x))' = (3x)' \cos(3x) = 3 \cos(3x)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$h''(x) = (3 \cos(3x))' = -3 \cdot (3x)' \sin(3x) = -3^2 \sin(3x)$$

$$h''(x) = (-3^2 \sin(3x))' = -3^2 (3x)' \cos(3x) = -3^3 \cos(3x)$$

Παρατηρούμε ότι

$$h(x) = \sin(3x)$$

$$h'(x) = 3 \cos(3x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$h''(x) = -3^2 \sin(3x) = 3^2 \sin\left(\frac{2\pi}{2} + 3x\right)$$

$$h'''(x) = -3^3 \cos(3x) = 3^3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$h^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) \quad (1)$$

Η (1) θα αποδειχθεί με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής. Για $n=1$ έπεται $h'(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$

Θα δειχθεί ότι (1) ισχύει

Για $n=k$ έπεται $h^{(k)}(x) = 3^k \sin\left(\frac{k\pi}{2} + 3x\right)$ θα δειχθεί.

Θα χόμαστε ότι η (1) ισχύει

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Για $n = k+1$ $h^{(k+1)}(x) = 3^{k+1} \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2} + 3x\right)$ θα το δείξουμε

πρίντι

$$h^{(k+1)}(x) = \left(h^{(k)}(x)\right)' = \left(3^k \sin\left(\frac{k\pi}{2} + 3x\right)\right)' =$$

$$= 3^k \left(\frac{k\pi}{2} + 3x\right)' \cos\left(\frac{k\pi}{2} + 3x\right) =$$

$$= 3^k \cdot 3 \cos\left(\frac{k\pi}{2} + 3x\right) = 3^{k+1} \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2} + 3x\right)$$

επομένως η (1) ισχύει για κάθε φυσικό k και συνεπώς για κάθε φυσικό n

Η (1) είναι η νιοστή παράγωγος της $h(x)$

(*) Είναι γνωστό ότι: $x+1 \leq e^x \leq xe^x+1$ Η ανισότητα χρειάζεται

$$x+1 \leq e^x \leq xe^x+1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq e^x & \text{αν } x > 0 \\ 1 \geq \frac{e^x-1}{x} \geq e^x & \text{αν } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Οπώς $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο στην (1) παραβोधής παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 2. Λύση: Α) Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της

γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο

$(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ή} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο προεχθίζουμε

τις τιμές της συνάρτησης ως εξής

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

$$\therefore \text{Είναι } f(x) = x^{1/4} \text{ και έχουμε } f'(x) = (x^{1/4})' = \frac{1}{4} x^{-3/4}$$

Γι: $x_0 = 16$ και $x_0 = 16,5$ παίρνουμε από την (1)

$$f(16,5) \approx f(16) + f'(16)(x - 16) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[4]{16,5} \approx (16)^{1/4} + \frac{1}{4} (16)^{-3/4} (16,5 - 16) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[4]{16,5} \approx 2 + \frac{1}{4} 2^{-3} (0,5) = 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{64} =$$

$$= 2,015$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Γιὰ $x_0 = 16$ καὶ $x = 15,8$ παίρνουμε

$$\sqrt[4]{15,8} \simeq (16)^{1/4} + \frac{1}{4} (16)^{-3/4} (15,8 - 16) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{15,8} &\simeq 2 + \frac{1}{4} 2^{-3} (-0,2) = 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \frac{-1}{5} = 2 - \frac{1}{160} = \\ &= 1,993 \end{aligned}$$

ii/ Είτε $f(x) = \frac{x}{x+1}$ καὶ έχουμε

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Γιὰ $x_0 = 1$ καὶ $x = 1,2$ βρίσκουμε

$$f(1,2) \simeq f(1) + f'(1) (1,2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$f(1,2) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} (0,2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} \frac{2}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = 0,55$$

Γιὰ $x_0 = 1$ καὶ $x = 0,8$ βρίσκουμε

$$f(0,8) \simeq f(1) + f'(1) (0,8 - 1) \Leftrightarrow$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$f(0,8) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} (-0,2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{2^1}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = 0,45$$

iii/ Είναι $f(x) = \sqrt{1+x}$ και έχουμε

$$f'(x) = (\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} (1+x)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

Γι' $x_0 = 8$ και $x = 8,1$

$$f(8,1) \simeq f(8) + f'(8) (8,1-8) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9,1} \simeq \sqrt{1+8} + \frac{1}{2\sqrt{1+8}} (0,1) = 3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = 3,016$$

Γι' $x_0 = 8$ και $x = 7,8$

$$f(7,8) \simeq f(8) + f'(8) (7,8-8) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \sqrt{7,8} &\simeq \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} (-0,2) = 3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2^1}{10} = 3 - \frac{1}{30} = \\ &= \frac{89}{30} = 2,966 \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) i/ Η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ έχει

πεδίο ορισμού $D_f \equiv \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ και είναι συνεχής

και παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[-3, 0]$ ως

περιοριστός πολυωνυμική είναι

$$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x - 7)' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$

έφα $f'(x) = 0$ όταν $6(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

είναι $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$ και $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} =$

$$= \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} + \rightarrow \frac{-1+3}{2} = 1 \\ - \rightarrow \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \text{ δηλ. όταν } x=1 \text{ ή } x=-2$$

Γνωρίζουμε το σημείο $x=-2$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος $[-3, 0]$

Υπολογίζουμε τις τιμές

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) - 7 = -54 + 27 + 36 - 7 = -61 + 63 = 2$$

$$f(0) = -7$$

$$f(2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 7 = -16 + 12 + 24 - 7 = -23 + 36 = 13$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή είναι η -7 στο σημείο 0
και μέγιστη είναι η 13 στο σημείο -2

ii/ Η συνάρτηση $g(x) = e^{\sin x}$ είναι συνεχής και

παρονομαζόμενη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο διάστημα

$$[-\pi, 2\pi] \text{ με } g'(x) = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} (\sin x)' = \omega x e^{\sin x}$$

Έχουμε διαδοχικά

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \omega x e^{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \omega x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega x = \omega \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\text{Για } k=0 : x_1 = \frac{\pi}{2} , x_2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$k=1 : x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} , x_4 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

Σταθροῦμε τα' σημεία $x_1 = -\frac{\pi}{2} , x_2 = \frac{\pi}{2} , x_3 = \frac{3\pi}{2}$

Υπολογίζουμε τις τιμές

$$g(-\pi) = e^{\sin(-\pi)} = e^{-\sin(\pi)} = e^0 = 1$$

$$g(-\pi/2) = e^{\sin(-\pi/2)} = e^{-\sin(\pi/2)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$g(\pi/2) = e^{\sin(\pi/2)} = e^1 = e$$

$$g(3\pi/2) = e^{\sin(3\pi/2)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$g(2\pi) = e^{\sin(2\pi)} = e^0 = 1$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή είναι η $\frac{1}{e}$ στο σημείο $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ και η μέγιστη τιμή είναι η e στο σημείο $\frac{\pi}{2}$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

iii/ Η συνάρτηση $h(x) = e^x - 2x$ είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο κλειστό διάστημα

$$[0, 1] \text{ με } h'(x) = (e^x - 2x)' = e^x - 2$$

Έχουμε Διαφοχικά

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$x \ln e = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

Η $x = \ln 2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος

$[0, 1]$. Υπολογίζουμε τις τιμές

$$h(0) = e^0 - 2 \cdot 0 = 1$$

$$h(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2 = 2 - \ln 4 = 0,613$$

$$h(1) = e^1 - 2 \cdot 1 = e - 2 = 0,7182$$

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή είναι η 0,613 στο

σημείο $\ln 2$ και η μέγιστη είναι η 1 στο σημείο 0

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 3. Λύση: Α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{2x} + x \quad (1)$$

Η (1) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον $f'(x) = (e^{2x} + x)' = 2e^{2x} + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπώς η (1) γνησίως αύξουσα

Η (1) ως συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι

"ένα προς ένα", (1-1) και αντιστρέφεται (δηλ υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f)

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} παραγωγίζεται στο σημείο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Στη διάν μας περίπτωση για $x=0 \Rightarrow f(0) = 1$ και

$$f'(0) = 3 \quad \text{συνεπώς} \quad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

β) Γνωρίζετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{g(x)} - x$. Επειδή η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε με $g(x) > 0$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{g(x)} - x \right)' = - \frac{g'(x)}{g^2(x)} - 1 =$$

$$= - \frac{-g^2(x)}{g^2(x)} - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{αφού } g'(x) = -g^2(x)$$

Αρα η $h(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Δηλαδή υπάρχει α πραγματικός αριθμός με $a > 0$ έτσι ώστε

$$h(x) = \frac{1}{g(x)} - x = a \quad \text{απ' όπου παίρνουμε}$$

$$\frac{1}{g(x)} = x + a \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{x+a} \quad \text{το ζητούμενο}$$

αφού $g(x) > 0$ και x θετικό πραγματικό αριθμό

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Γ) i/ Σύμφωνα με την υπόθεση για την συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) επιπλέον ισχύει $f(a) = f(\beta)$. Άρα ισχύει το θεώρημα Rolle και υπάρχει $\xi_1 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$. Ομοίως για την f στο διάστημα $[\beta, \gamma]$ ισχύει το θ. Rolle και υπάρχει $\xi_2 \in (\beta, \gamma) : f'(\xi_2) = 0$. Ομοίως για την f στο διάστημα $[\gamma, \delta]$ ισχύει το θ. Rolle και υπάρχει $\xi_3 \in (\gamma, \delta) : f'(\xi_3) = 0$. Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον τρεις πραγματικές ρίζες: ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Για την συνάρτηση f' στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, \xi_3]$, εφαρμόζουμε το θ. Rolle.

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ (αντιστοίχως $[\xi_2, \xi_3]$)

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) (αντιστοίχως (ξ_2, ξ_3))

Επιπλέον $f'(\xi_1) \neq f'(\xi_2)$ ($f'(\xi_2) \neq f'(\xi_3)$)

Αρκεί ισχύει το θ. Rolle και υπάρχει $\rho_1 \in (\xi_1, \xi_2)$

τέτοιο ώστε $f''(\rho_1) = 0$

Ομοίως υπάρχει $\rho_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\rho_2) = 0$

Επομένως η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον

δύο ρίζες πραγματικές : ρ_1, ρ_2

ii) θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - 3x + 1$

Εστω ότι η f έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[a, \beta], [\beta, \gamma], [\gamma, \delta]$ ως πολυωνυμική

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Έχουμε $f'(x) = (x^5 - 3x + 2)' = 5x^4 - 3$ δηλ. η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επομένως και στα διαστήματα

$(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \delta)$ Επιπλέον $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta) = 0$

γιατί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ρίζες της $f(x)$

Άρα ισχύει το θεώρημα Rolle και υπάρχουν

$\xi_1 \in (\alpha, \beta)$, $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$, $\xi_3 \in (\gamma, \delta)$ ώστε

$f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$, $f'(\xi_3) = 0$ αντίστοιχα

Αυτό όμως είναι ΑΤΟΠΟ γιατί η εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{5}x^2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{5}x^2 - \sqrt{3})(\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}x^2 - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$\hookrightarrow$ αλάνη στο $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 = \sqrt{3/5} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3/5} \text{ δηλ. η } f'(x) = 0$$

έχει δύο μόνο διαφορετικούς πραγματικούς ρίζες

Άρα η f έχει το πολύ τρεις διαφορετικούς ρίζες στο $\mathbb{R}$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα
 $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$

ως πολυωνυμική. Είναι $f(-2) = -25$, $f(-1) = 3$

άρα $f(-2) \neq f(-1)$.

Τότε με κ_1 μεταξύ των $f(-2), f(-1)$ υπάρχει $p_1 \in (-2, -1)$

τέτοιο ώστε: $f(p_1) = \kappa_1$

Είναι $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ άρα $f(-1) \neq f(1)$

Επομένως με κ_2 μεταξύ των $f(-1), f(1)$ υπάρχει

$p_2 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(p_2) = \kappa_2$

Είναι $f(1) = -1$, $f(2) = 27$ συνεπώς $f(1) \neq f(2)$

Οπότε με κ_3 μεταξύ των $f(1), f(2)$ υπάρχει $p_3 \in (1, 2)$

τέτοιο ώστε $f(p_3) = \kappa_3$

Τελικά η εξίσωση $x^5 - 3x + 2 = 0$ έχει ακριβώς

τρεις πραγματικές ρίζες

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 4 Λύση: A) $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3+x}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$

Επομένως με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή,
 Διαφορές τετραγώνων, υποτελίγουμε σε άρρητο υπολογισμό
 Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3+x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3+x}}{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3+x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+2x})^2 - (\sqrt{3+x})^2}{x (\sqrt{3+2x} + \sqrt{3+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3}+2x - \cancel{3}-x}{x (\sqrt{3+2x} + \sqrt{3+x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} (\sqrt{3+2x} + \sqrt{3+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3+x}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Τελικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3+x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$ii/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+5)}{\ln(x^3+9)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] = \text{del' Hospital} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x^2+5))'}{(\ln(x^3+9))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+5} (x^2+5)'}{\frac{1}{x^3+9} (x^3+9)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+5}}{\frac{3x^2}{x^3+9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(x^3+9)}{3x^2(x^2+5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot x^3 \left(1 + \frac{9}{x^3}\right)}{3x^2 \cdot x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{9}{x^3}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Τελικώς} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+5)}{\ln(x^3+9)} = \frac{2}{3}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$b) \quad i/ \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x - \sin(\pi x)}{4x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{αφού } \sin(\pi/2) = 1$$

Επομένως εφαρμόζουμε τον κανόνα del' Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x - \sin(\pi x)}{4x^2 - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x - \sin(\pi x))'}{(4x^2 - 1)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x)' - (\sin(\pi x))'}{(4x^2)' - (1)'} = \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2 - \pi \cos(\pi x)}{8x} =$$

$$= \frac{2 - \pi \cos(\pi/2)}{8 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{αφού } \cos(\pi/2) = 0$$

$$\text{Τελικά: } \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x - \sin(\pi x)}{4x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{aligned} \text{ii/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x} &= \left[(+\infty)^0 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\ln x)^{1/x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(\ln x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}} \stackrel{(\infty)}{=} e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{x}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} &= \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{(x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} (\ln x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x} = 1$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\Gamma) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{\omega x - 1} \right) = [(\infty) - (\infty)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\omega x - 2 + x^2}{x^2 \omega x - x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2\omega x - 2 + x^2)'}{(x^2 \omega x - x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\sin x + 2x}{2x\omega x - x^2\sin x - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-2\sin x + 2x)'}{(2x\omega x - x^2\sin x - 2x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\omega x + 2}{2\omega x - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\omega x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-2\omega x + 2)'}{(2\omega x - 4x\sin x - x^2\omega x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sin x}{-2\sin x - 4\sin x - 4x\omega x - -2x\omega x + x^2\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2\sin x)'}{(-6\sin x - 6x\omega x + x^2\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\omega x}{-6\omega x - 6\omega x + 6x\sin x + +2x\sin x + x^2\omega x} =$$

$$= \frac{2}{-12} = -\frac{1}{6}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Τελειώνει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{\omega x - 1} \right) = -\frac{1}{6}$$

$$\text{ii/} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan^{-1}(2x)}{\tan^{-1}(3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(2x)}{\arctan(3x)} =$$

$$= \frac{\pi/2}{\pi/2} = 1$$

$$\alpha\gamma\omicron\upsilon \quad \text{όταν} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \quad \text{τότε} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(2x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\omicron\text{φείως} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(3x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Τελειώνει} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan^{-1}(2x)}{\tan^{-1}(3x)} = 1$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 5. Λύση : Δίνεται η συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με τύπο} \quad f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$$

A) Έχουμε Διαφορίσιμα (κανόνας παραγώγισης πηλίκου)

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 3x}{x - 2} \right)' = \frac{(2x^2 - 3x)'(x - 2) - (2x^2 - 3x)(x - 2)'}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{(4x - 3)(x - 2) - (2x^2 - 3x) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 3x + 6 - 2x^2 + 3x}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{όταν} \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} + & 3 \\ - & 1 \end{matrix}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2} > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \quad \text{όταν} \quad x < 1 \quad \text{και} \quad x > 3$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Πίνακας προσήμων της $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(3, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(1, 2)$ και $(2, 3)$ παρουσιάζει δε τοπικά ακρότατα, μέγιστο στο σημείο 1 με τιμή $f(1) = 1$ ελάχιστο στο σημείο 3 με τιμή $f(3) = 9$

$$\begin{aligned}
 \text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{3}{x})}{x(1 - \frac{2}{x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{(2 - \frac{3}{x})}{(1 - \frac{2}{x})} = +\infty \cdot \frac{(2 - 0)}{(1 - 0)} = +\infty
 \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 (2 - \frac{3}{x})}{x (1 - \frac{2}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{(2 - \frac{3}{x})}{(1 - \frac{2}{x})} = -\infty\end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

και τις τιμές $f(1) = 1$, $f(3) = 9$

Τελικά το πεδίο τιμών της f είναι

$$(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Γ) Υπολογίστε την $f''(x)$

$$f''(x) = \left(\frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(2x^2 - 8x + 6)'(x-2)^2 - (2x^2 - 8x + 6)((x-2)^2)'}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(4x - 8)(x-2)^2 - (2x^2 - 8x + 6)2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{4(x-2)^3 - 4(x^2 - 4x + 3)(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{4\cancel{(x-2)}((x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3))}{(x-2)^{4-3}}$$

$$= \frac{4(\cancel{x^2} - \cancel{4x} + 4 - \cancel{x^2} + \cancel{4x} - 3)}{(x-2)^3} = \frac{4}{(x-2)^3}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(x-2)^3} = 0 \quad \text{ποτέ} \quad \text{δηλ. η } f \text{ δεν}$$

έχει σημεία καμπής

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(x-2)^3} > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Πίνακας προσηλώσεων της $f''(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-		+	
$f(x)$		↘		↗	

Από το παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο διάστημα ενώ στρέφει τα κοίλα πάνω (κυρτή) στο διάστημα $(2, +\infty)$

Δ) Είναι $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x-2}$ Το πεδίο ορισμού της είναι

$$D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

(α) Οριζόντια ασύμπτωτη : καθώς τείνει όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Δέν είναι πεπερασμένα η συνάρτηση Δέν έχει
ορίσματα ασύμπτωτη

(β) Κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Επομένως η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

(γ) Πλάγια ασύμπτωτη

Εστω η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ Τότε

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{2}{x})} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{aligned}
 \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x-2} - 2x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 2x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{3x} - \cancel{2x^2} + 4x}{x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1 - \frac{2}{x})} = \frac{1}{1} = 1
 \end{aligned}$$

Ομοίως είναι $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = 1$

Άρα η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη

στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Ε) Η f και επομένως ο περιορισμός της g είναι

συντχής στο διάστημα $[3, +\infty)$

Επιπλέον $g(3) = f(3) = 9$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x-2} = +\infty$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Συνεπώς το σύνολο τιμών της g είναι $T = [9, +\infty)$

Η f και επομένως η g είναι γενεύως αύξουσα στο

διαστήμα $[3, +\infty)$ οπότε είναι 1-1 και αντιστρέψιμη

Λύνοντας την εξίσωση $y = g(x) \Leftrightarrow$

$$y = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} \Leftrightarrow y(x - 2) = 2x^2 - 3x \Leftrightarrow yx - 2y = 2x^2 - 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yx + 3x = 2x^2 + 2y \Leftrightarrow (y + 3)x = 2x^2 + 2y \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - (y + 3)x + 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{(y + 3) \pm \sqrt{(y + 3)^2 - 16y}}{4} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{(y + 3) \pm \sqrt{y^2 - 10y + 9}}{4}$$

$$\text{οπότε} \quad g^{-1}(x) = \frac{(x + 3) \pm \sqrt{x^2 - 10x + 9}}{4}$$

Αν θέσουμε $h(x) = g^{-1}(x)$ με $T = [9, +\infty)$ ισχύει $g(h(x)) = x$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $h(x) = \frac{(x + 3) \pm \sqrt{x^2 - 10x + 9}}{4}$

