

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Άσκηση 1 (Μον. 20) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

- α) Να υπολογιστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .
- β) Να εξεταστεί αν ο A αντιστρέφεται. Αν ναι, να γραφεί ο A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των A^2 , A , I .
- γ) Να βρεθούν βάσεις για τους ιδιόχωρους που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A .
- δ) Να εξεταστεί αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Λύση της 1ης άσκησης

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\lambda & 4 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(4-2\lambda) - (4-4\lambda+4) - \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12.$$

β) Δοκιμάζοντας τους ακέραιους διαιρέτες του σταθερού όρου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ως πιθανές του ρίζες, βρίσκουμε ότι το 2 είναι μια τέτοια ρίζα. Διαιρώντας το πολυώνυμο με $\lambda - 2$, παίρνουμε $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda - 6) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα που ορίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να κάνουμε πράξεις γραμμών ή πράξεις στηλών σε αυτόν, καταγράφοντας ταυτόχρονα τις αλλαγές που επιφέρουν οι πράξεις αυτές στην ορίζουσα του πίνακα:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 + C_1} -(\lambda-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 6 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2 + \lambda - 6) = -(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

Συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 2$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και $\lambda = -3$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 1). Αφού το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A , ο A αντιστρέφεται. Εναλλακτικά, θέτοντας $\lambda = 0$ στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A (ισοδύναμα, κοιτάζοντας τον σταθερό όρο του χαρακτηριστικού πολυωνύμου), έπεται ότι $\det(A) = -12 \neq 0$, άρα ο A αντιστρέφεται. Από το θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε ότι $-A^3 + A^2 + 8A - 12I = 0$, άρα $-A^3 + A^2 + 8A = 12I$, το οποίο δίνει $A(-\frac{1}{12}A^2 + \frac{1}{12}A + \frac{2}{3}I) = I$. Επομένως, $A^{-1} = -\frac{1}{12}A^2 + \frac{1}{12}A + \frac{2}{3}I$.

γ) Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(A - 2I)X = 0$,

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

το οποίο γράφεται ως $2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$. Αυτό δίνει $x_1 = x_2 - 2x_3$, άρα ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$\{(x_2 - 2x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_2(1, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$. Τα διανύσματα $(1, 1, 0)$ και $(-2, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς κανένα από τα δύο δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου, επομένως αποτελούν βάση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -3$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(A + 3I)X = 0$, το

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

οποίο γράφεται ως $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$. Κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα συντελεστών του συστήματος

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

αυτού ώστε να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Αυτό δίνει}$$

$x_2 = -2x_3$ και $x_1 = x_3$, άρα ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο $\{(x_3, -2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$, ο οποίος προφανώς έχει το μονοσύνολο $\{(1, -2, 1)\}$ ως βάση.

δ) Από τη θεωρία συμπεραίνουμε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, καθώς, από τους υπολογισμούς που έγιναν στο προηγούμενο υποερώτημα, η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A ισούται με τη γεωμετρική της πολλαπλότητα.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 8) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -29 & 20 \\ -45 & 31 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

β) (μον. 12) Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Έστω n θετικός ακέραιος. Να βρεθεί τύπος για τον B^n .

Λύση της 2ης άσκησης

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ισούται με

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -29 - \lambda & 20 \\ -45 & 31 - \lambda \end{pmatrix} = (-29 - \lambda)(31 - \lambda) + 900 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, άρα ο A έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Αν ήταν διαγωνοποιήσιμος, θα υπήρχε αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = I$, άτοπο.

Εναλλακτικά, ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 1$ του A δίνεται από τη λύση του συστήματος $(A - I)X = 0$, το οποίο γράφεται ως

$$\begin{aligned} -30x_1 + 20x_2 &= 0 \\ -45x_1 + 30x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Αυτό δίνει $x_2 = \frac{3}{2}x_1$, άρα ο ιδιόχωρος είναι ο $\{(x_1, \frac{3}{2}x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ ο οποίος έχει διάσταση 1, καθώς το μονοσύνολο $\{(1, \frac{3}{2})\}$ αποτελεί βάση του.

Άρα η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής δεν είναι ίση με την αλγεβρική της πολλαπλότητα, συνεπώς ο A δεν διαγωνοποιείται.

Εναλλακτικά, ως διαιρέτης του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, το ελάχιστο πολυώνυμο του A θα ισούται με $\lambda - 1$ ή με $(\lambda - 1)^2$. Όμως $A - I = \begin{pmatrix} -30 & 20 \\ -45 & 30 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $(\lambda - 1)^2$, το οποίο δεν είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων με διακεκριμένες ρίζες, άρα ο A δεν διαγωνοποιείται.

β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B ισούται με

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ 2 & -5 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-5 - \lambda) + 8 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3), \text{ άρα οι ιδιοτιμές του } B$$

είναι οι $\lambda = -1$ και $\lambda = -3$. Ειδικότερα, ο B διαγωνοποιείται επειδή έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -1$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(B + I)X = 0$, το

$$\text{οποίο γράφεται ως } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}. \text{ Αυτό δίνει } x_1 = 2x_2, \text{ άρα ο ιδιόχωρος είναι ο } \{(2x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} \text{ και έχει}$$

βάση το μονοσύνολο $\{(2, 1)\}$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -3$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(B + 3I)X = 0$, το

$$\text{οποίο γράφεται ως } \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}. \text{ Αυτό δίνει } x_1 = x_2, \text{ άρα ο ιδιόχωρος είναι ο } \{(x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} \text{ και έχει}$$

βάση το μονοσύνολο $\{(1, 1)\}$.

$$\text{Η θεωρία δίνει ότι } B = PDP^{-1}, \text{ όπου } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ και } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Όμως } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ και, για } n$$

$$\text{θετικό ακέραιο, έχουμε } D^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}. \text{ Άρα}$$

$$B^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2 - 3^n & -2 + 2 \cdot 3^n \\ 1 - 3^n & -1 + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Εναλλακτικά, από την Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων, υπάρχουν πολυώνυμα $q(x)$, $ax + b$ τέτοια ώστε

$$x^n = q(x)(x + 1)(x + 3) + ax + b. \text{ Θέτοντας } x = -1 \text{ και } x = -3 \text{ παίρνουμε } \begin{cases} (-1)^n = -a + b \\ (-3)^n = -3a + b \end{cases}, \text{ απ' όπου}$$

$$\text{βρίσκουμε } a = (-1)^n \frac{1 - 3^n}{2} \text{ και } b = (-1)^n \frac{3 - 3^n}{2}. \text{ Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι}$$

$$B^n = aB + bI = (-1)^n \frac{1 - 3^n}{2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + (-1)^n \frac{3 - 3^n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2 - 3^n & -2 + 2 \cdot 3^n \\ 1 - 3^n & -1 + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3 (Μον. 20) Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = -z\}$.

α) Να βρεθεί βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $V^\perp$ του V . Να περιγραφεί γεωμετρικά ο $V^\perp$.

β) Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

γ) Να υπολογιστεί η προβολή του διανύσματος $u = (1, 3, 5)$ στον υπόχωρο $V^\perp$.

δ) Θεωρούμε το υποσύνολο $W = \left\{ \begin{pmatrix} x + y & 3y \\ x - y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ του $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Να αποδειχθεί ότι το W είναι υπόχωρος του $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Είναι οι διανυσματικοί χώροι W και $V^\perp$ είναι ισόμορφοι;

Λύση της 3ης άσκησης

α) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = -z\} = \{(2y, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2, 1, -2)\}$ και το μονοσύνολο $\{(2, 1, -2)\}$ αποτελεί βάση του V . Ο υπόχωρος $V^\perp$ αποτελείται από εκείνα τα διανύσματα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα σε κάθε διάνυσμα του V ή, ισοδύναμα, σε κάθε διάνυσμα μιας βάσης του V , άρα $V^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \cdot (2, 1, -2) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 2z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -2x + 2z\} = \{(x, -2x + 2z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -2, 0) + z(0, 2, 1) : x, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -2, 0), (0, 2, 1)\}$. Τα διανύσματα $(1, -2, 0)$ και $(0, 2, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς κανένα από τα δύο δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου, επομένως αποτελούν βάση του $V^\perp$. Γεωμετρικά, ο $V^\perp$ περιγράφει το επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(2, 1, -2)$.

β) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Gram-Schmidt: Έστω $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1)$. Τα διανύσματα $u_1 = v_1 = (1, -2, 0)$ και $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (0, 2, 1) + \frac{4}{5}(1, -2, 0) = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1)$ είναι ορθογώνια και τα διανύσματα

$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ και $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

γ) Από τη θεωρία, η προβολή του διανύσματος u στον υπόχωρο $V^\perp$ είναι το διάνυσμα

$$(u \cdot w_1) w_1 + (u \cdot w_2) w_2 = -\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0) + \frac{7\sqrt{5}}{3}(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}) = (\frac{19}{9}, \frac{32}{9}, \frac{35}{9}).$$

Εναλλακτικά, θέτοντας $w = (2, 1, -2)$, η προβολή του διανύσματος u στον υπόχωρο V ισούται με

$$p = \frac{u \cdot w}{w \cdot w} w = -\frac{5}{9}(2, 1, -2) = (-\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{10}{9}), \text{ άρα η προβολή του διανύσματος } u \text{ στον υπόχωρο } V^\perp \text{ ισούται}$$

$$\text{με } u - p = (1, 3, 5) - (-\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{10}{9}) = (\frac{19}{9}, \frac{32}{9}, \frac{35}{9}).$$

δ) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ x-y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Άρα ο

W είναι ο υπόχωρος του $M_{2,2}(\mathbb{R})$ που παράγεται από τους πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Οι δύο αυτοί

πίνακες είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του W , καθώς κανένα από τα δύο δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου, επομένως αποτελούν βάση του W . Άρα $\dim(W) = 2 = \dim(V^\perp)$. Από τη θεωρία, έπεται ότι οι διανυσματικοί χώροι W και $V^\perp$ είναι ισόμορφοι.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 5)

i) Να εξεταστεί αν η απεικόνιση $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $h(x, y) = (2, 3x - 5y)$ είναι γραμμική.

ii) Να εξεταστεί αν η απεικόνιση $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $g(x, y) = (y, x, |y|)$ είναι γραμμική.

β) (μον. 15) Δίνεται η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x, y, z) = (x + y, 3y - 3z, x + z)$.

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γραμμική.

ii) Να βρεθεί βάση του πυρήνα της f και βάση της εικόνας της f .

iii) Να υπολογιστεί ο πίνακας της f ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{(1, 1, -1), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

Λύση της 4ης άσκησης

α)

i) Αφού $h(0,0)=(2,0) \neq (0,0)$, η απεικόνιση h δεν είναι γραμμική.

ii) Θεωρούμε το διάνυσμα $u=(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Αφού $g(u)=(1,0,1)$ και $g(-u)=g(0,-1)=(-1,0,1)$, έχουμε ότι $g(-u) \neq -g(u)$, άρα η απεικόνιση g δεν είναι γραμμική.

β)

i) Αν $u=(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3, v=(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε $w=\lambda u+\mu v=(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2)$ και $f(w)=((\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2), 3(\lambda y_1+\mu y_2)-3(\lambda z_1+\mu z_2), (\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda z_1+\mu z_2))$
 $=(\lambda(x_1+y_1)+\mu(x_2+y_2), \lambda(3y_1-3z_1)+\mu(3y_2-3z_2), \lambda(x_1+z_1)+\mu(x_2+z_2))$
 $=\lambda(x_1+y_1, 3y_1-3z_1, x_1+z_1)+\mu(x_2+y_2, 3y_2-3z_2, x_2+z_2)=\lambda f(x_1, y_1, z_1)+\mu f(x_2, y_2, z_2)$.

ii) Έστω $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ τα διανύσματα της συνήθους διατεταγμένης βάσης του $\mathbb{R}^3$. Τότε $f(e_1)=(1,0,1)=e_1+e_3, f(e_2)=(1,3,0)=e_1+3e_2, f(e_3)=(0,-3,1)=-3e_2+e_3$. Επομένως ο πίνακας

της f ως προς τη συνήθη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ο πυρήνας της f είναι ο

μηδενόχωρος του A και η εικόνα της f είναι ο χώρος στηλών του A . Κάνουμε γραμμοπράξεις στον A για να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οδηγοί υπάρχουν στις δύο πρώτες στήλες του τελευταίου πίνακα, άρα οι δύο πρώτες στήλες του A αποτελούν βάση της εικόνας της f . Με άλλα λόγια, το σύνολο $\{(1,0,1), (1,3,0)\}$ αποτελεί βάση του $\text{Im}(f)$. Επίσης ο μηδενόχωρος του A περιγράφεται

από το σύστημα $\begin{matrix} x_1+x_2=0 \\ 3x_2-3x_3=0 \end{matrix}$, το οποίο δίνει $x_1=-x_2$ και $x_2=x_3$. Άρα $\text{Ker}(f)=\{(-x_2, x_2, x_2): x_2 \in \mathbb{R}\}$

και το μονοσύνολο $\{(-1,1,1)\}$ αποτελεί βάση του $\text{Ker}(f)$.

Εναλλακτικά, αφού $f(x,y,z)=(x+y, 3y-3z, x+z)=x(1,0,1)+y(1,3,0)+z(0,-3,1)$, συμπεραίνουμε ότι $\text{Im}(f)=\text{span}\{(1,0,1), (1,3,0), (0,-3,1)\}$. Οι τρεις αυτοί γεννήτορες είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα (καθώς $(0,-3,1)=(1,0,1)-(1,3,0)$), ενώ τα διανύσματα $(1,0,1), (1,3,0)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν βάση του $\text{Im}(f)$. Επίσης, λύνοντας το γραμμικό σύστημα που δίνει η σχέση $f(x,y,z)=(0,0,0)$, έπεται, όπως και παραπάνω, ότι το μονοσύνολο $\{(-1,1,1)\}$ αποτελεί βάση του $\text{Ker}(f)$.

iii) Έστω $v_1=(1,1,-1), v_2=(0,-1,1), v_3=(0,0,1)$. Τότε $f(v_1)=f(1,1,-1)=(2,6,0)=2v_1-4v_2+6v_3$, $f(v_2)=f(0,-1,1)=(-1,-6,1)=-v_1+5v_2-5v_3$, $f(v_3)=f(0,0,1)=(0,-3,1)=3v_2-2v_3$. Άρα ο πίνακας της

f ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.5.1, σελ. 246-247, στο σύγγραμμα του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου: Αν S_1 η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$ και S_2 η βάση του $\mathbb{R}^3$ που δίνεται στο παρόν υποερώτημα, τότε ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S_1 στην S_2 είναι ο

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B=P^{-1}AP. \text{ Εύκολα υπολογίζουμε (με τις γνωστές μεθόδους) ότι}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Επομένως, } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία των σελίδων 30 και 87-88 του αρχείου [EAP_PLH12_OSS2_2016.pdf](#) ή των σελίδων 12-14 του αρχείου [endeiktikes_askhseis_ergasia2_2016.pdf](#)

στο study, δηλαδή κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 6 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ώσπου να τον φέρουμε

σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 6 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \text{ άρα } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 5) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ είναι ερμιτιανός και να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του.

β) (μον. 15) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

i) Να εξεταστεί αν ο B είναι θετικά ορισμένος, αρνητικά ορισμένος ή αόριστος.

ii) Να βρεθεί διαγώνιος πίνακας D και ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε $B = PDP^T$.

iii) Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή με τύπο $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$. Τι είδους κωνική τομή περιγράφει η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 13$;

Λύση της 5ης άσκησης

α) Έχουμε $A^* = \overline{A^T} = \overline{\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} = A$, άρα ο A είναι ερμιτιανός. Επίσης,

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - (1+i)(1-i) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$, άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda=1$ και $\lambda=4$.

β)

i) Ο πίνακας B είναι συμμετρικός. Ελέγχοντας τις ορίζουσες των πρωτευόντων κύριων υποπινάκων του, έχουμε ότι $\det(3) = 3 > 0$ και $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 18 - 4 = 14 > 0$, άρα ο B είναι θετικά ορισμένος. Εναλλακτικά, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B ισούται με

$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-2)(\lambda-7)$, άρα οι ιδιοτιμές του B είναι οι $\lambda=2 > 0$ και $\lambda=7 > 0$, επομένως ο B είναι θετικά ορισμένος.

ii) Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=2$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(B-2I)X=0$,

το οποίο γράφεται ως $\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{matrix}$. Αυτό δίνει $x_1 = -2x_2$, άρα ο ιδιόχωρος είναι ο $\{(-2x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

και έχει βάση το μονοσύνολο $\{(-2, 1)\}$. Το μέτρο του διανύσματος $(-2, 1)$ ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ ισούται με $\sqrt{5}$, άρα ο ιδιόχωρος έχει ορθοκανονική βάση το μονοσύνολο $\{(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 7$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(B - 7I)X = 0$, το οποίο γράφεται ως
$$\begin{matrix} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}$$
. Αυτό δίνει $x_2 = 2x_1$, επομένως ο ιδιόχωρος είναι ο $\{(x_1, 2x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ και έχει βάση το μονοσύνολο $\{(1, 2)\}$. Το μέτρο του διανύσματος $(1, 2)$ ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ ισούται με $\sqrt{5}$, άρα ο ιδιόχωρος έχει ορθοκανονική βάση το μονοσύνολο $\{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$.

Από τη θεωρία, έπεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ και $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

iii) Παρατηρούμε ότι ο 1×1 πίνακας $(Q(x_1, x_2))$ ισούται με τον πίνακα $(x_1 \ x_2)B(x_1 \ x_2)^T$, για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Από τη θεωρία έπεται ότι, αφού $13 > 0$ και ο πίνακας B είναι θετικά ορισμένος, η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 13$ περιγράφει έλλειψη στο επίπεδο Ox_1x_2 . Συγκεκριμένα, αν θέσουμε $x = (x_1 \ x_2)^T$ και $y = (y_1 \ y_2)^T$, ο μετασχηματισμός $x = Py$ μετατρέπει τη δοσμένη εξίσωση στην $\frac{2}{13}y_1^2 + \frac{7}{13}y_2^2 = 1$.