

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	20/12/2017 23:59μμ
Ακ. Έτος	2017-18	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	2	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

Ημερομηνία ανάρτησης:	Τρίτη	21 Νοεμβρίου 2017
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας:	Κυριακή	17 Δεκεμβρίου 2017
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	20 Δεκεμβρίου 2017 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Παρασκευή	22 Δεκεμβρίου 2017

Πριν από τη λύση των ασκήσεων να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 2^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 3 (Χώροι εσωτερικού γινομένου)

Κεφάλαιο 4 (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)

Κεφάλαιο 5 (Χαρακτηριστικά μεγέθη και κανονικές μορφές γραμμικών απεικονίσεων)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Γραμμική Άλγεβρα**» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να μελετηθεί επίσης το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στο study.eap.gr:

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό: **Κεφ. 6** (Διανυσματικοί Χώροι), **Κεφ. 7** (Βάσεις και Διάσταση),

Κεφ. 8 (Γραμμικές Απεικονίσεις), **Κεφ. 9** (Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα), **Κεφ. 10** (Διαγωνοποίηση),

Κεφ. 11 (Τετραγωνικές Μορφές).

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : από Γραμμική Άλγεβρα: Διανυσματικοί Χώροι, Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και κατανόηση:

- των εννοιών της ορθογωνιότητας, της ορθής προβολής και του ορθογωνίου συμπληρώματος,
- της μεθόδου Gram-Schmidt για τη μετατροπής τυχαίας βάσης διανυσματικού χώρου σε ορθοκανονική βάση,
- της σύνδεσης ορθοκανονικών βάσεων και ορθογώνιων πινάκων,
- της έννοιας της γραμμικής απεικόνισης και των κριτηρίων ελέγχου της γραμμικότητας μιας απεικόνισης μεταξύ διανυσματικών χώρων,
- εννοιών που συνοδεύουν τις γραμμικές απεικονίσεις, δηλαδή του πυρήνα, της εικόνας, του πίνακα αναπαράστασης, του βαθμού, της μηδενικότητας, του μονομορφισμού, του επιμορφισμού και του ισομορφισμού,
- του τρόπου υπολογισμού χαρακτηριστικών μεγεθών (ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων) μιας γραμμικής απεικόνισης, των κριτηρίων διαγωνοποίησης και της χρήσης των μεθόδων αυτών για τον υπολογισμό δυνάμεων διαγωνοποιήσιμων πινάκων,
- χαρακτηριστικών μεγεθών πινάκων ειδικού τύπου (π.χ. συμμετρικών πινάκων),
- τετραγωνικών μορφών και της σύνδεσής τους με τις κωνικές τομές.

Να διαβαστούν προσεκτικά οι εκφωνήσεις και να αιτιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης της Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -8 \\ -3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

- i) (μον. 4) Να υπολογιστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές του A .
- ii) (μον. 6) Να εξεταστεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν είναι, να εκφραστεί ο A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των A^2 , A και I .
- iii) (μον. 6) Να βρεθούν βάσεις για τους ιδιόχωρους που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A .
- iv) (μον. 4) Να εξεταστεί αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Λύση της 1ης άσκησης

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 7 & -8 \\ -3 & -5-\lambda & 3 \\ 2 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -5-\lambda & 3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -8 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - (4+\lambda) \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 7 \\ -3 & -5-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(21 - 8(5 + \lambda)) - (3(6 - \lambda) - 24) - (4 + \lambda)((\lambda + 5)(\lambda - 6) + 21) = (-16\lambda - 38) + (3\lambda + 6) - (4 + \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 9) \\ &= -13\lambda - 32 - (\lambda^3 + 3\lambda^2 - 13\lambda - 36) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2. \end{aligned}$$

Από την παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 1$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 1) και $\lambda = -2$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2).

ii) Αφού το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A , ο A είναι αντιστρέψιμος. Εναλλακτικά, $\det(A) = \det(A - 0I) = p(0) = 4 \neq 0$. Από το θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε ότι $A^3 + 3A^2 - 4I = 0$, άρα $A(A^2 + 3A) = 4I$. Επομένως, $A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{4}A$.

iii) Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(A - I)X = 0$, το οποίο γράφεται ως

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Κάνουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα ώσπου να καταλήξουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -8 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{r_2 \leftarrow -\frac{1}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 5r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{r_2 \leftarrow -r_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι επομένως ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Αυτό δίνει $x_2 = -x_3$ και $x_1 = 3x_3$. Επομένως, ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο $\{(3x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in K\}$ (όπου K το σώμα στο οποίο υποθέτουμε ότι ανήκουν τα στοιχεία του πίνακα A , δηλαδή $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Βάση του ιδιόχωρου είναι το μονοσύνολο $\{(3, -1, 1)\}$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -2$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(A + 2I)X = 0$, το οποίο γράφεται ως

$$8x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0$$

$$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Κάνουμε γραμμοπράξεις στον επανζητημένο πίνακα ώσπου να καταλήξουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & -8 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow -\frac{1}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 7 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 8r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow (-1)r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι επομένως ισοδύναμο με το

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 = 0$$

το οποίο δίνει $x_2 = 0$ και $x_1 = x_3$. Επομένως ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο $\{(x_3, 0, x_3) : x_3 \in K\}$, βάση του οποίου είναι το μονοσύνολο $\{(1, 0, 1)\}$.

iv) Αφού η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = -2$ ισούται με 1 ενώ η αλγεβρική της πολλαπλότητα ισούται με 2, έπεται ότι ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

A. (μον. 12) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & c^3 - c & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, όπου c πραγματική σταθερά.

i) Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

ii) Έστω n θετικός ακέραιος. Να υπολογιστεί το ίχνος και η ορίζουσα του A^n .

iii) Να βρεθούν όλες οι τιμές του c για τις οποίες υπάρχει διαγώνιος πίνακας D και ορθογώνιος πίνακας Q έτσι ώστε $A = QDQ^T$.

B. (μον. 8) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί διαγώνιος πίνακας D και ορθογώνιος πίνακας

Q έτσι ώστε $B = QDQ^T$.

Λύση της 2ης άσκησης

A.

i) Ο A είναι άνω τριγωνικός, επομένως οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, δηλαδή οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ και $\lambda = 4$, όλες με αλγεβρική πολλαπλότητα 1. Επομένως, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

ii) Οι ιδιοτιμές του A^n είναι οι 2^n , 3^n και 4^n , όλες με αλγεβρική πολλαπλότητα 1. Επομένως, το ίχνος του A^n ισούται με $2^n + 3^n + 4^n$ και η ορίζουσα του A^n ισούται με $2^n \cdot 3^n \cdot 4^n = 24^n$.

iii) Για να υπάρχει διαγώνιος πίνακας D και ορθογώνιος πίνακας Q έτσι ώστε $A = QDQ^T$ πρέπει και αρκεί ο A να είναι συμμετρικός, δηλαδή να ισχύει ότι $c^3 - c = 0$. Επειδή $c^3 - c = c(c-1)(c+1)$, έπεται ότι οι ζητούμενες τιμές του c είναι οι $c = 0$, $c = 1$ και $c = -1$.

B. Ο B είναι συμμετρικός, άρα τέτοιοι πίνακες D και Q υπάρχουν. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 10\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 10).$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του B είναι οι $\lambda = 10$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 1) και $\lambda = 0$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2).

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 10$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $(B - 10I)X = 0$, το οποίο γράφεται ως

$$\begin{aligned} -9x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 &= 0 \\ -10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως, $x_3 = 0$ και $x_2 = 3x_1$, άρα ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο $\{(x_1, 3x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$, βάση του οποίου είναι το μονοσύνολο $\{(1, 3, 0)\}$. Για να βρούμε ορθοκανονική του βάση (ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$), διαιρούμε το διάνυσμα βάσης με το μέτρο του, το οποίο ισούται με $\sqrt{10}$. Άρα ορθοκανονική βάση του ιδιόχωρου είναι το μονοσύνολο $\{(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0)\}$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ δίνεται από τη λύση του συστήματος $BX = 0$, το οποίο γράφεται ως

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο δίνει $x_1 = -3x_2$. Άρα ο εν λόγω ιδιόχωρος είναι ο $\{(-3x_2, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, βάση του οποίου είναι το σύνολο $\{(-3, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Τα δύο διανύσματα αυτής της βάσης είναι ορθογώνια ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. Επομένως, για να βρούμε ορθοκανονική βάση, διαιρούμε καθένα από αυτά τα διανύσματα με το μέτρο του. Άρα ορθοκανονική βάση του ιδιόχωρου είναι το σύνολο $\{(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0), (0, 0, 1)\}$. Από τη θεωρία, έπεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3 (Μον. 20) Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

A. (μον. 3) Να βρεθούν διανύσματα v_1 και v_2 που να αποτελούν βάση του V .

B. (μον. 3) Να βρεθεί βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $V^\perp$ του V . Τι περιγράφει γεωμετρικά ο υπόχωρος $V^\perp$;

C. (μον. 3) Έστω A ο 3×2 πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα v_1 και v_2 που υπολογίσατε στο υποερώτημα A. Να υπολογιστεί ο πίνακας $B = A^T A$ και να αποδειχθεί ότι είναι αντιστρέψιμος.

D. (μον. 6) Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $u = (a, b, c)$ του $\mathbb{R}^3$. Να υπολογιστεί η ορθογώνια προβολή w του u στον υπόχωρο V .

E. (μον. 5) Θεωρώντας τα u και w ως 3×1 πίνακες (δηλαδή ως διανύσματα-στήλες), να αποδειχθεί ότι $w = AB^{-1}A^T u$.

Λύση της 3ης άσκησης

A.

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z - y\} = \{(z - y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Τα διανύσματα $(-1, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός $\lambda(-1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε $(-\lambda + \mu, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$, άρα $\lambda = \mu = 0$. Επομένως τα διανύσματα $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ σχηματίζουν βάση του V .

B. Ο υπόχωρος $V^\perp$ αποτελείται από εκείνα τα διανύσματα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα σε κάθε διάνυσμα του V ή, ισοδύναμα, σε κάθε διάνυσμα μιας βάσης του V . Επομένως,

$$V^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \cdot (-1, 1, 0) = (x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x = x + z = 0\} = \{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Μια βάση του $V^\perp$ είναι το μονοσύνολο $\{(1, 1, -1)\}$. Γεωμετρικά, ο $V^\perp$ περιγράφει την ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(1, 1, -1)$. Ισοδύναμα, ο $V^\perp$ περιγράφει την ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στο επίπεδο V .

C. Έχουμε $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ο B είναι αντιστρέψιμος διότι

$$\det(B) = 3. \text{ Εύκολα υπολογίζουμε ότι } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

D. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt, βρίσκουμε πρώτα μια ορθοκανονική βάση του V :

Τα διανύσματα $u_1 = v_1 = (-1, 1, 0)$ και $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (1, 0, 1) + \frac{1}{2}(-1, 1, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ σχηματίζουν

ορθογώνια βάση του V και τα διανύσματα $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ και $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$

σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του V . Επομένως,

$$w = (u \cdot w_1) w_1 + (u \cdot w_2) w_2 = \frac{-a+b}{\sqrt{2}} (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + \frac{a+b+2c}{\sqrt{6}} (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$$

$$= \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, 0 \right) + \left(\frac{a+b+2c}{6}, \frac{a+b+2c}{6}, \frac{2a+2b+4c}{6} \right) = \left(\frac{2a-b+c}{3}, \frac{-a+2b+c}{3}, \frac{a+b+2c}{3} \right).$$

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει ως εξής: Αφού ο $V^\perp$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V στον $\mathbb{R}^3$, έπεται ότι για να βρούμε την ορθογώνια προβολή του u στον V αρκεί να αφαιρέσουμε από το u την ορθογώνια προβολή του στον $V^\perp$. Όμως $V^\perp = \text{span}\{(1,1,-1)\}$. Επομένως, έχουμε ότι $w = u - \frac{u \cdot (1,1,-1)}{(1,1,-1) \cdot (1,1,-1)} (1,1,-1) = (a,b,c) - \frac{a+b-c}{3} (1,1,-1) = \left(\frac{2a-b+c}{3}, \frac{-a+2b+c}{3}, \frac{a+b+2c}{3} \right)$.

Ε. Θεωρώντας τώρα τα u και w ως διανύσματα-στήλες και με βάση όσα υπολογίσαμε στα προηγούμενα υποερωτήματα, έχουμε ότι

$$AB^{-1}A^T u = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a+b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-b+c}{3} \\ \frac{-a+2b+c}{3} \\ \frac{a+b+2c}{3} \end{pmatrix} = w.$$

Παρατήρηση: Η αντιστρεψιμότητα του πίνακα B καθώς και το υποερώτημα Ε μπορούν να απαντηθούν με ομοιόμορφο και πιο θεωρητικό τρόπο (ανεξάρτητα από αριθμητικούς υπολογισμούς βάσεων, πινάκων και ορθογώνιων προβολών), μέσω του εξής γενικού επιχειρήματος:

Για να δείξουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος, αρκεί να δείξουμε ότι ο μηδενοχώρος του είναι τετριμμένος. Αν το διάνυσμα X ανήκει στον μηδενοχώρο του $B = A^T A$, τότε το διάνυσμα AX ανήκει ταυτόχρονα στον χώρο στηλών του A και στον μηδενοχώρο του A^T . Όμως ο χώρος στηλών του A ισούται με τον χώρο γραμμών του A^T ο οποίος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενοχώρου του A^T . Επομένως, το διάνυσμα AX ανήκει ταυτόχρονα σε κάποιον υπόχωρο και στο ορθογώνιο συμπλήρωμά του, επομένως $AX=0$. Αυτό σημαίνει ότι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τα αντίστοιχα στοιχεία του X ισούται με 0. Αφού οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έπεται ότι $X=0$.

Για να δείξουμε ότι $w = AB^{-1}A^T u$, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα w ανήκει στον υπόχωρο V και επομένως γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων v_1 και v_2 , τα οποία αποτελούν τις στήλες του πίνακα A . Επομένως υπάρχει κάποιο διάνυσμα X (με στοιχεία τους συντελεστές του εν λόγω γραμμικού συνδυασμού) τέτοιο ώστε $w = AX$. Το διάνυσμα $u - w = u - AX$ είναι κάθετο στον V , άρα και στα διανύσματα v_1 και v_2 , τα οποία είναι οι γραμμές του A^T . Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων, έπεται ότι $A^T(u - AX) = 0$, δηλαδή $A^T u = A^T AX = BX$, άρα $X = B^{-1}A^T u$ και $w = AX = AB^{-1}A^T u$.

Άσκηση 4 (Μον. 20) Δίνεται η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x, y, z) = (x - y + 2z, z - y, x + z)$.

- (μον. 4) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση.
- (μον. 3) Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$.
- (μον. 4) Να βρεθεί βάση της εικόνας της f και η διάσταση του πυρήνα της f .
- (μον. 5) Να υπολογιστεί ο πίνακας της f ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.
- (μον. 4) Να εξεταστεί αν υπάρχει διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ ως προς την οποία ο πίνακας της f να είναι αντιστρέψιμος.

Λύση της 4ης άσκησης

i) Έστω $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $w = \lambda u + \mu v$. Τότε $w = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$, επομένως
 $f(w) = ((\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2), (\lambda z_1 + \mu z_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2))$
 $= (\lambda(x_1 - y_1 + 2z_1) + \mu(x_2 - y_2 + 2z_2), \lambda(z_1 - y_1) + \mu(z_2 - y_2), \lambda(x_1 + z_1) + \mu(x_2 + z_2))$
 $= \lambda(x_1 - y_1 + 2z_1, z_1 - y_1, x_1 + z_1) + \mu(x_2 - y_2 + 2z_2, z_2 - y_2, x_2 + z_2) = \lambda f(x_1, y_1, z_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2).$

ii) Έστω $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ τα διανύσματα της συνήθους διατεταγμένης βάσης του $\mathbb{R}^3$. Τότε $f(e_1) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = (-1, -1, 0) = -e_1 - e_2$, $f(e_3) = (2, 1, 1) = 2e_1 + e_2 + e_3$. Επομένως ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Η εικόνα της f είναι ο χώρος στηλών του πίνακα A . Κάνουμε γραμμοπράξεις στον A μέχρι να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_3 \leftarrow I_3 - I_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_3 \leftarrow I_3 + I_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οδηγοί υπάρχουν στις δύο πρώτες στήλες του τελευταίου πίνακα. Επομένως, οι δύο πρώτες στήλες του αρχικού πίνακα σχηματίζουν βάση της εικόνας της f . Με άλλα λόγια, μία βάση του $\text{Im}(f)$ δίνεται από το σύνολο $\{(1, 0, 1), (-1, -1, 0)\}$. Συμπεραίνουμε επομένως ότι $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$.

iv) Έστω $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Τότε $f(v_1) = (1, 0, 1) = v_1 - v_2 + v_3$, $f(v_2) = (0, -1, 1) = v_1 - 2v_2 + v_3$, $f(v_3) = (2, 0, 2) = 2v_1 - 2v_2 + 2v_3$. Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.5.1, σελ. 246-247, στο σύγγραμμα του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου: Αν S_1 η βάση του $\mathbb{R}^3$ που δίνεται στο υποερώτημα ii) και S_2 η βάση του $\mathbb{R}^3$ που δίνεται στο παρόν υποερώτημα, τότε ο πίνακας αλλαγής βάσης

από την S_1 στην S_2 είναι ο $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = P^{-1}AP$. Εύκολα υπολογίζουμε (με τις γνωστές

μεθόδους) ότι $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Επομένως, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

v) Αφού ο πυρήνας της απεικόνισης f έχει διάσταση 1, η f δεν είναι 1-1. Επομένως, δεν υπάρχει διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ ως προς την οποία ο πίνακας της f να είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 5 (Μον. 20) Δίνεται η τετραγωνική μορφή $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2ax_1x_2 + 5x_2^2$, όπου a πραγματική σταθερά.

i) (μον. 5) Να βρεθεί ένας συμμετρικός πίνακας A τέτοιος ώστε ο 1×1 πίνακας $[Q(x_1, x_2)]$ να ισούται με τον πίνακα $[x_1 \ x_2] A [x_1 \ x_2]^T$, για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

ii) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι για $a = -3$ η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη.

iii) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι για $a = 7$ υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $Q(x_1, x_2) < 0$ και $Q(y_1, y_2) > 0$.

iv) (μον. 5) Η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 5$ περιγράφει μια κωνική τομή. Να διερευνηθεί με ποιό τρόπο εξαρτάται το είδος της κωνικής τομής (π.χ. έλλειψη, υπερβολή, κλπ.) από την τιμή του a .

Λύση της 5ης άσκησης

i) Από τη γενική θεωρία των τετραγωνικών μορφών, έχουμε ότι $A = \begin{pmatrix} 5 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$.

ii) Για $a = -3$, ελέγχουμε τις ορίζουσες των πρωτευόντων κύριων υποπινάκων του A . Έχουμε ότι $\det(5) = 5 > 0$ και $\det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 16 > 0$, άρα η τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά ορισμένη.

Εναλλακτικά, οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $\lambda = 2 > 0$ και $\lambda = 8 > 0$, άρα η τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά ορισμένη.

iii) Για $a = 7$, ελέγχουμε τις ορίζουσες των πρωτευόντων κύριων υποπινάκων του A . Έχουμε ότι $\det(5) = 5 > 0$ και $\det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = -24 < 0$, άρα η τετραγωνική μορφή Q είναι αόριστη.

Εναλλακτικά, οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $\lambda = -2 < 0$ και $\lambda = 12 > 0$, άρα η τετραγωνική μορφή Q είναι αόριστη.

Από τον ορισμό, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $Q(x_1, x_2) < 0$ και $Q(y_1, y_2) > 0$. Για παράδειγμα, $Q(1, 1) = 5 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1^2 = 24 > 0$ και $Q(-1, 1) = 5 \cdot (-1)^2 + 14 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 1^2 = -4 < 0$ (τα διανύσματα $(1, 1)$ και $(-1, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 12 και -2, αντίστοιχα).

iv) Γενικότερα, για τυχαίο $a \in \mathbb{R}$, ελέγχουμε τις ορίζουσες των πρωτευόντων κύριων υποπινάκων του A . Έχουμε ότι $\det(5) = 5 > 0$ και $\det \begin{pmatrix} 5 & a \\ a & 5 \end{pmatrix} = 25 - a^2$.

Αν $25 - a^2 > 0$, δηλαδή αν $-5 < a < 5$, τότε η τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά ορισμένη (εναλλακτικά οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $\lambda = 5 - a > 0$ και $\lambda = 5 + a > 0$) και επομένως, από τη θεωρία, η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 5$ περιγράφει έλλειψη στο επίπεδο Ox_1x_2 .

Αν $25 - a^2 < 0$, δηλαδή αν $a < -5$ ή $a > 5$, τότε η τετραγωνική μορφή Q είναι αόριστη (εναλλακτικά, το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα είναι $25 - a^2 < 0$) και επομένως, από τη θεωρία, η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 5$ περιγράφει υπερβολή στο επίπεδο Ox_1x_2 .

Αν $a = -5$, η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 5$ γράφεται ως $5x_1^2 - 10x_1x_2 + 5x_2^2 = 5$, δηλαδή $(x_1 - x_2)^2 = 1$, δηλαδή $(x_1 - x_2 - 1)(x_1 - x_2 + 1) = 0$, δηλαδή $x_1 - x_2 = 1$ ή $x_1 - x_2 = -1$. Γεωμετρικά αυτό περιγράφει την ένωση δύο παράλληλων ευθειών στο επίπεδο Ox_1x_2 (περίπτωση εκφυλισμένης κωνικής τομής).

Αν $a = 5$, η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 5$ γράφεται ως $5x_1^2 + 10x_1x_2 + 5x_2^2 = 5$, δηλαδή $(x_1 + x_2)^2 = 1$, δηλαδή $(x_1 + x_2 - 1)(x_1 + x_2 + 1) = 0$, δηλαδή $x_1 + x_2 = 1$ ή $x_1 + x_2 = -1$. Γεωμετρικά αυτό περιγράφει την ένωση δύο παράλληλων ευθειών στο επίπεδο Ox_1x_2 (περίπτωση εκφυλισμένης κωνικής τομής).