

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

**ΠΛΗ 12**  
**2<sup>η</sup> Εργασία 2016-2017**

**Σύνταξη – επιμέλεια**

**Παντελής . Π . Προδρομίδης**

Σολωμού 29 Αθήνα

τηλ. 6942047218

email [p27prodromidis@gmail.com](mailto:p27prodromidis@gmail.com)



Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 1. Λύση: α) Έστω  $\vec{u} = (1, -2, 3)$  και  $\vec{v} = (1, -1, 1)$

Έχουμε διαδοχικά

$$\cos \theta = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{(1, -2, 3) \cdot (1, -1, 1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{1 + 2 + 3}{\sqrt{14} \sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{42}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{6}{\sqrt{42}} \cdot \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{42}} = \frac{6\sqrt{42}}{42} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

Ομοίως έστω  $\vec{v} = (-2, 3)$ ,  $\vec{w} = (-1, 1)$  Επομένως

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w})}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{(-2, 3) \cdot (-1, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2 + 3}{\sqrt{13} \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

β) Έστω  $(x, y, z)$  η τρίτη γραμμή του πίνακα  $A$ . Αφού ο

$A$  ορθογωνικός πίνακας τότε  $AA^T = I_3$ . Επομένως

$$AA^T = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & y \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & z \end{pmatrix} = I_3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{x-3y+2z}{\sqrt{14}} \\ \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} & \frac{x-3y+2z}{\sqrt{14}} & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{14}}(x-3y+2z) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z = 0 \\ x-3y+2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y - z = 0 \\ x-3y+2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 4y \\ x = -5y \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -5y \\ z = 4y \\ (-5y)^2 + y^2 + (4y)^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -5y \\ z = 4y \\ 42y^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\left. \begin{aligned} x &= -5y \\ z &= 4y \\ y^2 &= \frac{1}{42} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{42}} \end{aligned} \right\}$$

Ετσι για  $y = \frac{1}{\sqrt{42}}$  τότε  $(x, y, z) = \left( \frac{-5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}} \right)$

η για  $y = -\frac{1}{\sqrt{42}}$  τότε  $(x, y, z) = \left( \frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{-4}{\sqrt{42}} \right)$

Τελικά ο  $A$  είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{42} & -3/\sqrt{42} & 2/\sqrt{42} \\ -5/\sqrt{42} & 4/\sqrt{42} & 1/\sqrt{42} \end{pmatrix} \quad "$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{42} & -3/\sqrt{42} & 2/\sqrt{42} \\ 5/\sqrt{42} & -4/\sqrt{42} & -1/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

γ) Έστω  $V = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  ο υπόχωρος του  $\mathbb{R}^4$  που παράγεται

από τα διανύσματα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ . Αν  $\vec{v} = (x, y, z, w)$  διάνυσμα

του  $\mathbb{R}^4$  τότε το  $\vec{v}$  ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα  $V^\perp$

αν το  $\vec{v}$  είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του  $V$  δηλ.

σε κάθε γεννήτορα του  $V$ . Έχουμε τις σχέσεις

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, w) \cdot (1, -2, 2, 0) = 0 \\ (x, y, z, w) \cdot (0, -1, 1, -1) = 0 \\ (x, y, z, w) \cdot (1, 2, -1, 5) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ -y + z - w = 0 \\ x + 2y - z + 5w = 0 \end{array} \right\}$$

Επιλύουμε το ομογενές σύστημα

θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος (Μέθοδος Gauss)

$$(A/O) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_3 - \gamma_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)\gamma_2} \sim$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \gamma_1 + 2\gamma_2 \\ \sim \\ \gamma_3 - 4\gamma_2 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ \gamma_2 + \gamma_3 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ο τελευταίος πίνακας ανηγμένη υφικνωτική μορφή του πίνακα  $(A/0)$  παρέχει το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} x + 2w = 0 \\ y + 2w = 0 \\ z + w = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2w \\ y = -2w \\ z = -w \end{array} \right., w \in \mathbb{R}$$

απ' όπου

$$\vec{V} = (x, y, z, w) = (-2w, -2w, -w, w) = w(-2, -2, -1, 1)$$

Επομένως

$$V^\perp = \text{span} \left( (-2, -2, -1, 1) \right) \quad \text{πού επιβεβαιώνει ότι το}$$

ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $V$  παράγεται από το

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Δίνουμε  $\vec{v} = (-2, -2, -1, 1)$ . Συνεπώς το  $\vec{v}$  μηδενισό

Δίνουμε  $\vec{v} = (-2, -2, -1, 1)$  αποτελεί μια βάση του

δ) Εφαρμόζουμε τη διαδικασία των Gram-Schmidt

Θέτουμε  $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = (1, 1, 0)$

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = (2, 0, 1) - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} (1, 1, 0) =$$

$$= (2, 0, 1) - \frac{2}{2} (1, 1, 0) = (2, 0, 1) - (1, 1, 0) =$$

$$= (1, -1, 1)$$

Το σύνολο  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  μια ορθογώνια βάση

Κανονικοποιούμε τα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Επει το εύνολο  $\{ \hat{u}_1, \hat{u}_2 \}$  η ζητούμενη ορθοκανονική

βάση του  $W$

Εστω  $\vec{w} = (1, 0, 0)$  η ορθή προβολή του επί του υποχώρου

$W$  δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} P &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} (1, 1, 0) + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} (1, -1, 1) = \\ &= \frac{1}{2} (1, 1, 0) + \frac{1}{3} (1, -1, 1) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \\ &= \left( \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} (5, 1, 2) \end{aligned}$$

η ζητούμενη ορθή προβολή του  $w$  στον  $W$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 2. λύση α) i/ Η  $f$  είναι γραμμική επιδίω για

κάθε  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  και κάθε  $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

επιληφύεται ότι

$$f(\mu \vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2) = \mu f(\vec{u}_1) + \lambda f(\vec{u}_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Προγίτι} \quad f(\vec{u}_1) &= f(x_1, y_1, z_1) = (x_1 + y_1, y_1 + z_1) \\ f(\vec{u}_2) &= f(x_2, y_2, z_2) = (x_2 + y_2, y_2 + z_2) \end{aligned} \right\} (*)$$

οπότε

$$f(\mu \vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2) = f(\mu(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) =$$

$$= f(\mu x_1 + \lambda x_2, \mu y_1 + \lambda y_2, \mu z_1 + \lambda z_2) =$$

$$= (\mu x_1 + \lambda x_2 + \mu y_1 + \lambda y_2, \mu y_1 + \lambda y_2 + \mu z_1 + \lambda z_2) =$$

$$= (\mu(x_1 + y_1) + \lambda(x_2 + y_2), \mu(y_1 + z_1) + \lambda(y_2 + z_2)) =$$

$$= (\mu(x_1 + y_1), \mu(y_1 + z_1)) + (\lambda(x_2 + y_2), \lambda(y_2 + z_2)) =$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$= u(x_1 + y_1, y_1 + z_1) + \lambda(x_2 + y_2, y_2 + z_2) \stackrel{(*)}{=} u(\vec{u}_1) + \lambda f(\vec{u}_2)$$

Συνεπώς  $f(u\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2) = u f(\vec{u}_1) + \lambda f(\vec{u}_2)$  και η  $f$  γραμμική

ii/ Η  $g$  δεν είναι γραμμική, γιατί για κάθε γραμμική

απεικόνιση ισχύει:  $g(0,0,0) = (0,0,0)$ . Στην δική μας

περίπτωση είναι  $g(0,0,0) = (0,1,0) \neq (0,0,0)$

iii/ Η  $h$  δεν είναι γραμμική. Για παράδειγμα έχουμε

$$h(1,1,0) = (1,0)$$

$$h(0,1,1) = (0,1)$$

$$h((1,1,0) + (0,1,1)) = h(1,2,1) = (2,1)$$

Παρατηρούμε ότι  $h((1,1,0) + (0,1,1)) \neq h(1,1,0) + h(0,1,1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2,1) \neq (1,0) + (0,1) = (1,1)$$

Ποὺ εμπεύει ότι  $h(u+v) \neq h(u) + h(v)$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

B) i/ Αρχικά επιδιώ

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \gamma_2 - \gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

το σύνολο  $S = \{ (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) \}$  αποτελεί μία

βάση του  $\mathbb{R}^3$ . Εστω τώρα  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  θα προστίσουμε

το διάνυσμα  $(x, y, z)$  ως γραμμικό συνδυασμό των

διανυσμάτων της  $S$ . Έχουμε διαδοχικά:

$$(x, y, z) = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (0, a, a) + (b, 0, b) + (c, c, 0) \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (b+c, a+c, a+b) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b+c = x \\ a+c = y \\ a+b = z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = x-c \\ a = y-c \\ x+y-2c = z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{array} \right\}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

11.

Επομένως

$$(x, y, z) = \frac{1}{2} (-x+y+z) (0, 1, 1) + \frac{1}{2} (x-y+z) (1, 0, 1) + \frac{1}{2} (x+y-z) (1, 1, 0)$$

$$\varphi(x, y, z) = \varphi\left(\frac{1}{2} (-x+y+z) (0, 1, 1) + \frac{1}{2} (x-y+z) (1, 0, 1) + \frac{1}{2} (x+y-z) (1, 1, 0)\right)$$

Οπως η  $\varphi$  είναι γραμμική συνεπώς παίρνουμε

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} (-x+y+z) \varphi(0, 1, 1) + \frac{1}{2} (x-y+z) \varphi(1, 0, 1) + \frac{1}{2} (x+y-z) \varphi(1, 1, 0) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} (-x+y+z) (0, 1, 3) + \frac{1}{2} (x-y+z) (5, 4, 3) + \frac{1}{2} (x+y-z) (2, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x, y, z) = \left( \frac{5}{2} (x-y+z) + (x+y-z), \frac{1}{2} (-x+y+z) + 2(x-y+z), \frac{3}{2} (-x+y+z) + \frac{3}{2} (x-y+z) \right)$$

$$\varphi(x, y, z) = \left( \frac{7}{2} x - \frac{3}{2} y + \frac{3}{2} z, \frac{3}{2} x - \frac{3}{2} y + \frac{5}{2} z, 3z \right) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x, y, z) = \left( \frac{1}{2} (7x - 3y + 3z), \frac{1}{2} (3x - 3y + 5z), 3z \right)$$

ο τύπος της  $\varphi$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ii) Σφωρώ την κανονική βάση  $B$  του  $\mathbb{R}^3$

$$B = \{ e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \}$$

και έχουμε

$$\varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0) = \left( \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right)$$

$$\varphi(e_2) = \varphi(0, 1, 0) = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right)$$

$$\varphi(e_3) = \varphi(0, 0, 1) = \left( \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3 \right)$$

απ' όπου ο πίνακας αναπρίεστης της  $\varphi$

$$A = [\varphi]_B = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ως προς την κανονική βάση  $B$  του  $\mathbb{R}^3$

Ο πίνακας  $A$  έχει στήλες τα διανύσματα  $\varphi(e_1), \varphi(e_2),$

$\varphi(e_3)$ , Προχωράμε στην εύρεση της Α.Κ.Μ του  $A$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$A_2 \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\gamma_1 \\ 2/3\gamma_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \gamma_2 - 7\gamma_1 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 4 & -26/3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ 1/4\gamma_2 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 1 & -26/12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ 1/3\gamma_3 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 1 & -26/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -26/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_3 \\ \gamma_2 + \frac{26}{12}\gamma_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι η απλοποιημένη μορφή

του A

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Βάση - Διαστάση  $\text{Ker } \varphi$ : Έστω  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  τότε  $\vec{v} \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow$

$$\varphi(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2}(7x - 3y + 3z), \frac{1}{2}(3x - 3y + 5z), 3z \right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(7x - 3y + 3z) = 0 \\ \frac{1}{2}(3x - 3y + 5z) = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Συνοπτως  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  απ' όπου διαικ  $\text{Ker } \varphi = 0$

Βάση - Διαστάση  $\text{Im } \varphi$ : Είναι γνωστό ότι

$$\text{Im } \varphi = \text{span}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)) \Leftrightarrow$$

$$\text{Im } \varphi = \text{span}\left(\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)\right)$$

Πηλ. τό πηδίο τιφώι της  $\varphi$  περιέχεται από τις Ειρώιη  
των Δικνωφύτων της βάσης  $B$  (στηλές του πίνακα  $A$ )

Από τίν Α.Κ.Μ του πίνακα  $A$  συμπεριέινουφ ότι τό

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Παραπένω εύνοιο αποτελέσει βάσει του  $\text{Im } \varphi$

Προφανώς  $\dim \text{Im } \varphi = 3$

iii/ Είναι  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  και η  $\varphi$  "1-1". Επιπλέον

$\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R}^3$  δηλ. η  $\varphi$  "επί". (\*)

α) αυτό σημαίνει ότι η  $\varphi$  είναι "ισομορφισμός".

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 3. Λύση: α) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

του πίνακα  $A$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) ((-\lambda)(-3-\lambda) + 2) = (1-\lambda) (3\lambda + \lambda^2 + 2) =$$

$$= 3\lambda + \lambda^2 + 2 - 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$$

Επομένως  $P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$

Παρατηρούμε ότι  $P(0) = 2 \Rightarrow \det(A) = 2 \neq 0$  που σημαίνει

ότι ο  $A$  αντιστρέφεται (Κριτήριο ορίσοντας για  
την ύπαρξη του πίνακα  $A^{-1}$ )

β) Οι ρίζες της εξίσωσης  $P(\lambda) = 0$  είναι οι ιδιοτιμές

του  $A$  Έχουμε  $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$-\lambda^2(\lambda + 2) + (\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(1 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$(\lambda+2)(1-\lambda)(1+\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+2=0 \\ 1-\lambda=0 \\ 1+\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=-2$$

Προχωράμε στην εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων

Για την ιδιοτιμή  $\lambda_1=1$  λύνουμε το αντίστοιχο ομογενές

$$\text{σύστημα: } (A-\lambda_1 I_3) \vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -y+z=0 \\ -2y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ -6z=0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Οι λύσεις του ομογενούς συστήματος καθορίζουν τον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής 1

$$V(1) = \{ (x, y, z) = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0) : x \in \mathbb{R} \} \text{ απ' όπου}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα}$$

Ομοίως για την ιδιοτιμή  $\lambda_2=-1$  έχουμε αντίστοιχα

$$(A-\lambda_2 I_3) \vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{απ' όπου}$$

ο Ιδιοχώρος

$$V(-1) = \left\{ (x, y, z) = (z, -z, z) = z(1, -1, 1) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Με π.χ  $z=1$  παίρνουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Ομοίως για } \lambda_3 = -2 : (A - \lambda_3 I_3) \vec{u} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -5x \\ z = -2x \\ 0x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5x \\ z = -2x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ιδιοχώρος : } V(-2) = \left\{ (x, y, z) = (x, -5x, -2x) = x(1, -5, -2) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{και ιδιοδιάνυσμα το } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

γ) Είναι  $P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

του  $A$ . Εφαρμόζουμε το θεώρημα των Cayley-Hamilton

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow -A^3 - 2A^2 + A + 2I_3 = 0$$

Πολ/ζουμε την παραπάνω με τον πίνακα  $A^{-1}$  (δείχνει στο πρώτο α) την ύφεση του πίνακα  $A^{-1}$ )

$$-A^{-1}A^3 - 2A^{-1}A^2 + A^{-1}A + 2A^{-1}I_3 = A^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$A^2 - 2A + I_3 + 2A^{-1} = 0 \Leftrightarrow 2A^{-1} = A^2 + 2A - I_3$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} A^2 + A - \frac{1}{2} I_3 \quad (*)$$

δηλ. ο πίνακας  $A^{-1}$  συνκρίσει των συνκρίσεων του  $A$

Έχουμε διόδοχια

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

και η (\*) δίνει

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$A^{-1} = \frac{1}{2} A^2 + A - \frac{1}{2} I_3 =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 3 & 7/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

τον αντίστροφο πίνακα του A

δ) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται, αφού έχει πραγματικές διακριτές (διαφορετικές ανά δύο) ιδιοτιμές

$$\text{Αν βρούμε } P = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ισχύει } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D \quad \text{δηλ. } P^{-1}AP = D$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\varepsilon) \quad \varepsilon_1 \vee \varepsilon_2 \quad P^{-1}AP = D \Leftrightarrow \underbrace{PP^{-1}}_I AP = PD \Leftrightarrow AP = DP \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{APP^{-1}}_I = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \text{ για διαγωνοποίηση του } A$$

Επομένως

$$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdot \dots \cdot (PDP^{-1}) =$$

$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \cdot \dots \cdot (P^{-1}P)DP^{-1} =$$

$$= PD \cdot D \cdot \dots \cdot DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

$$\text{οπότε } A^n = PD^nP^{-1}, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα  $P^{-1}$  (Μέθοδος Gauss)

$$(P/I_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Y_1+Y_2 \\ Y_3+Y_2}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Y_1+Y_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}Y_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/7 & -1/7 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{Y_1+4Y_3 \\ Y_2-5Y_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3/7 & -4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/7 & -1/7 \end{array} \right) = (I_3/P^{-1})$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Με  $n = 2016$  η (1) δίνει

$$A^{2016} = P D^{2016} P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{2016} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2016} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2^{2016} \\ 0 & -1 & (-5)2^{2016} \\ 0 & 1 & -2^{2017} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 1-2^{2016} & 1-2^{2016} \\ 0 & 2+5 \cdot 2^{2016} & -5+5 \cdot 2^{2016} \\ 0 & -2+2^{2017} & 5+2^{2017} \end{pmatrix} \quad \text{o ζητούμενος πίνακας}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 4. λύση: α) Υπολογίζουμε τον πίνακα B

$$B = I_3 - 2AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Γεωρούμε τον πίνακα

$$B - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$P(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) ((1+\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda) ((1+\lambda)^2 - 2^2) = (1-\lambda)(1+\lambda-2)$$

$$(1+\lambda+2) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  δίνονται από την λύση της εξίσωσης  $P(\lambda) = 0$ . Έχουμε διαδοχικά

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$$

Παρατηρούμε  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  διπλή ιδιοτιμή,  $\lambda_3 = -3$  απλή ιδιοτιμή του  $B$

Προχωράμε στην εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων. Για την

διπλή ιδιοτιμή  $\lambda = 1$  λύνουμε το ομογενές σύστημα

$$(B - \lambda I_3) \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y \in \mathbb{R} \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ z \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων}$$

που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 είναι ο ιδιοχώρος

$$V(1) = \{ (x, y, z) = (z, y, z) = z(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

απ' όπου τα ιδιοδιανύσματα  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

τα διανύσματα  $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$  είναι εφ'

υψιμεκωζή μορφή, άρα γραμμικά ανεξάρτητα, και το σύνολό τους αποτελεί μία βάση του ιδιοχώρου  $V(1)$

Ομοίως για την άλλη ιδιοτιμή  $\lambda_3 = -3$  έχουμε

$$(B - \lambda_3 I_3) \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1+3 & 0 & 2 \\ 0 & 1+3 & 0 \\ 2 & 0 & -1+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 4y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ιδιοχώρος } V(-3) = \{ (x, y, z) = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1) : z \in \mathbb{R} \}$$

και ιδιοδιάνυσμα το  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  το μη μηδενικό

διάνυσμα  $\vec{u}_3 = (-1, 0, 1)$  αποτελεί μία βάση του ιδιοχώρου  $V(-3)$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

β.) Υπολογίζουμε τον πίνακα  $B_k$  :

$$B_k = kI_3 - 2AA^T =$$

$$= k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

Γεωρούμε τον πίνακα

$$B_k - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} (k-2)-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & (k-2)-\lambda \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος  
πίνακα  $B_k$  είναι

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$P(\lambda) = \det(B_k - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (k-2)-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & (k-2)-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (k-\lambda) \begin{vmatrix} (k-2)-\lambda & 2 \\ 2 & (k-2)-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (k-\lambda) \left( (k-2-\lambda)^2 - 2^2 \right) = (k-\lambda)(k-4-\lambda)(k-\lambda)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B_k$  δίνονται από την λύση της εξίσωσης

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (k-\lambda)(k-4-\lambda)(k-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = k \text{ διπλή}$$

ιδιοτιμή  $\lambda_3 = k-4$  απλή ιδιοτιμή

Είναι γνωστό ότι ο συγγενισμένος πίνακας  $B_k$  είναι

θετικά ορισμένος εάν όληs οι ιδιοτιμές του

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Είναι θετική

$$\left. \begin{array}{l} \text{Συνεπώς πρέπει } k > 0 \\ k - 4 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} k > 0 \\ k > 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow k > 4$$

Γεληνί αν  $k > 4$  ο συμμετρικός πίνακας  $B_k$

είναι θετικά ορισμένος

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 5. Λύση : α) Παρατηρούμε ότι

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \beta x_1 + \gamma x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 (\alpha x_1 + \beta x_2) + x_2 (\beta x_1 + \gamma x_2) =$$

$$= \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \beta x_2 x_1 + \gamma x_2^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$$

Άρα για την τετραγωνική μορφή

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1 x_2 + x_2^2$$

έχουμε  $\alpha = 1$  ,  $2\beta = 10$  ,  $\gamma = 1$

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^T A X$$

απ' όπου ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 25 = \lambda^2 - 2\lambda - 24$$

Ετσι η χαρακτηριστική εξίσωση  $P(\lambda) = 0$  δίνει

$$\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \quad ; \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 10}{2} = \begin{matrix} + & \frac{2+10}{2} = 6 \\ - & \frac{2-10}{2} = -4 \end{matrix}$$

οπότε οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = -4$  (κρίσις)

Επειδή  $\lambda_1 = 6 > 0$ ,  $\lambda_2 = -4 < 0$  ο πίνακας  $A$  είναι αόριστος

και συνεπώς η τετραγωνική μορφή  $Q(x_1, x_2)$  είναι

αόριστη

γ) Προχωράμε στην εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων

Για την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 6$  λύνουμε το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda_1 I_2) \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-6 & 5 \\ 5 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=y \\ 0y=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad \text{απ' όπου ο ιδιοχώρος}$$

$$V(1) = \{ (x,y) = (y,y) = y(1,1) : y \in \mathbb{R} \}$$

Με τήν επιλογή  $y=1$  παίρνουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ομοίως για τήν ιδιοτιμή  $\lambda_2 = -4$  έχουμε

$$(A - \lambda_2 I_2) \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+4 & 5 \\ 5 & 1+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + 5y = 0 \\ 5x + 5y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ 0y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

απ' όπου ο ιδιοχώρος

$$V(-4) = \{ (x,y) = (-y,y) = y(-1,1) : y \in \mathbb{R} \}$$

και ιδιοδιάνυσμα το  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Τα ιδιοδιανύσματα  $\vec{u}_1 = (1, 1)$  και  $\vec{u}_2 = (-1, 1)$  είναι

ορθογώνια μεταξύ τους αφού  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (1, 1) \cdot (-1, 1) = -1 + 1 = 0$

(ανελιγόμενο αφού ο  $A$  είναι συμμετρικός πίνακας

και τα ιδιοδιανύσματα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  αντιστοιχούν σε διχογραφτικές

ιδιοτιμές). Κανονικοποιούμε τα  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{u}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}}$$

και σχηματίζουν τον ορθογώνιο πίνακα  $P$

που έχει στηλώνες τα  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  διανύσματα. Είναι

$$P = (\hat{u}_1 \hat{u}_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον ο συμμετρικός πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται

Αν θέσουμε  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  τότε ισχύει

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = D \Leftrightarrow A = PDP^T$$

$$(o \text{ } P \text{ ορθογώνιος } P^{-1} = P^T)$$

δ) Με την αλλαγή μεταβλητών (αλλαγή συστήματος αναφοράς)  $x = Py$  παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T P^T A P y = \\ &= y^T D y = Q'(y) \end{aligned}$$

Ετσι παίρνουμε με  $y = (y_1 \ y_2)$

$$\begin{aligned} Q'(y_1, y_2) &= (y_1 \ y_2) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ &= (6y_1 \ -4y_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 6y_1^2 - 4y_2^2 \end{aligned}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Επομένως  $Q(x_1, x_2) = 12 \Leftrightarrow Q'(y) = 12 \Leftrightarrow$

$$6y_1^2 - 4y_2^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{6y_1^2}{12} - \frac{4y_2^2}{12} = \frac{12}{12} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{3} = 1$$

Συνεπώς η κωνική τομή που αντιστοιχεί στην

εξίσωση  $Q'(y) = 12$  στο νέο σύστημα συντεταγμένων

και επομένως στην εξίσωση  $Q(x) = 12$  είναι

υπερβολή