

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 12) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

- i) Να εξηγηθεί γιατί οι πίνακες AA^T και $A^T A$ είναι τετραγωνικοί. Ορίζεται ο πίνακας $AA^T + A^T A$;
- ii) Να αποδειχθεί ότι ο $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος και να υπολογιστεί ο $(A^T A)^{-1}$.
- iii) Να υπολογιστεί το ίχνος του $7AA^T$ και η ορίζουσα του $3A^T A$.

β) (μον. 8) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

- i) Να αποδειχθεί ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και να υπολογιστεί ο B^{-1} .
- ii) Να αποδειχθεί ότι $B^{-1} = I + B - B^2$.

Λύση της 1ης άσκησης

α)

- i) Ο A έχει 3 γραμμές και 2 στήλες ενώ ο A^T έχει 2 γραμμές και 3 στήλες, άρα ο AA^T ορίζεται και είναι 3×3 . Ο A^T έχει 2 γραμμές και 3 στήλες ενώ ο A έχει 3 γραμμές και 2 στήλες, άρα ο $A^T A$ ορίζεται και είναι 2×2 . Αφού δεν έχει νόημα η πρόσθεση ενός 3×3 πίνακα και ενός 2×2 πίνακα, έπεται ότι ο πίνακας $AA^T + A^T A$ δεν ορίζεται.

ii) Έχουμε $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, επομένως $\det(A^T A) = 25 - 1 = 24 \neq 0$. Άρα ο $A^T A$

αντιστρέφεται και $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/24 & 1/24 \\ 1/24 & 5/24 \end{pmatrix}$.

iii) Έχουμε $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, επομένως $\text{tr}(7AA^T) = 7 \cdot (2 + 4 + 4) = 70$.

Επίσης, από την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα, $\det(3A^T A) = 9 \det(A^T A) = 9 \cdot 24 = 216$.

β)

- i) Ο B είναι άνω τριγωνικός, άρα $\det(B) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$. Επομένως, ο B είναι αντιστρέψιμος. Για να βρούμε τον B^{-1} , χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Επομένως, } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii) } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ άρα, από την απάντηση στο προηγούμενο υποερώτημα,}$$

$$\text{έπεται ότι } I + B - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}.$$

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ είναι σε κλιμακωτή μορφή. Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A .

β) (μον. 4) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} -2i & 3+4i \\ -3+4i & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ είναι κανονικός.

γ) (μον. 4) Έστω $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $D = CC^T C - C^T C C^T$ είναι αντισυμμετρικός.

δ) (μον. 8) Δίνεται ο πίνακας $E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. Να βρεθεί βάση του χώρου στηλών του E και να υπολογιστεί η διάσταση του μηδενόχωρου του E .

Λύση της 2ης άσκησης

α) Ο πίνακας A δεν έχει μηδενικές γραμμές. Αφού το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής, έπεται ότι ο A είναι σε κλιμακωτή μορφή. Κάνουμε γραμμοπράξεις για να βρούμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A .

β) Έχουμε ότι $BB^* = \begin{pmatrix} -2i & 3+4i \\ -3+4i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & -3-4i \\ 3-4i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -8+6i \\ -8-6i & 25 \end{pmatrix}$ και

$B^*B = \begin{pmatrix} 2i & -3-4i \\ 3-4i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 3+4i \\ -3+4i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -8+6i \\ -8-6i & 25 \end{pmatrix}$, άρα $BB^* = B^*B$. Επομένως, ο πίνακας B είναι κανονικός.

γ) Αφού

$D^T = (CC^T C - C^T C C^T)^T = (C C^T C)^T - (C^T C C^T)^T = C^T (C^T)^T C^T - (C^T)^T C^T (C^T)^T = C^T C C^T - C C^T C = -D$, ο πίνακας D είναι αντισυμμετρικός.

δ) Κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή}$$

και έχει οδηγούς στις δύο πρώτες στήλες. Επομένως οι δύο πρώτες στήλες του E , δηλαδή οι $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

αποτελούν βάση του χώρου στηλών του E . Επομένως ο βαθμός του E ισούται με 2 (εναλλακτικά, ο τελευταίος πίνακας έχει δύο μη μηδενικές γραμμές). Αφού ο E έχει 5 στήλες, έπεται, από βασικό θεώρημα, ότι ο μηδενόχωρος του E έχει διάσταση $5 - 2 = 3$.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 7) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 5x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

με τη μέθοδο Cramer.

β) (μον. 7) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής παραμέτρου a για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_2 &= -9 \\ 5x_1 + a^2x_2 &= 45 \end{aligned}$$

είναι αδύνατο.

γ) (μον. 6) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής παραμέτρου b για τις οποίες το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + bx_2 + 3x_3 &= 0 \\ bx_1 + 2x_2 + (8-b)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Λύση της 3ης άσκησης

α) Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων έχει ορίζουσα

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0, \text{ άρα, από τη μέθοδο Cramer, έχουμε}$$

$$x_1 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{7},$$

$$x_2 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1,$$

$$x_3 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{7}.$$

β) Κάνουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -9 \\ 5 & a^2 & 45 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -12 \\ 5 & a^2 & 45 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & a^2 - 5 & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a^2 - 5 & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - (a^2 - 5)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 50 - 2a^2 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

ισοδύναμο με το σύστημα $x_2 = 2$, το οποίο είναι αδύνατο αν και μόνο αν $50 - 2a^2 \neq 0$, δηλαδή αν $0 = 50 - 2a^2$

και μόνο αν $a \neq \pm 5$.

γ) Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών ισούται με

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & b & 3 \\ b & 2 & 8-b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b & 3 \\ 2 & 8-b \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ b & 8-b \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix} = (8b - b^2 - 6) - (8 - b - 3b) + 3(2 - b^2) =$$

$-4b^2 + 12b - 8 = -4(b-1)(b-2)$. Επομένως, από τη θεωρία, το δοσμένο ομογενές σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση αν και μόνο αν $b \neq 1, 2$.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 8) Να εξεταστεί αν:

i) το σύνολο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x - 1\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$.

ii) το σύνολο $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = 6z\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

β) (μον. 12) Θεωρούμε τους εξής υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 15z = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}.$$

i) Να βρεθεί βάση του V και βάση του W .

ii) Να βρεθεί βάση του $V \cap W$. Να υπολογιστεί η διάσταση του $V + W$. Είναι το άθροισμα $V + W$ ευθύ;

Λύση της 4ης άσκησης

α)

i) Αφού $0 \neq 2-1$, το διάνυσμα $(2,0)$ ανήκει στο A . Από την άλλη, $0=1-1$, άρα το διάνυσμα $(1,0) = \frac{1}{2}(2,0)$ δεν ανήκει στο A (εναλλακτικά, $(2,0) \in A$ και $(1,2) \in A$, όμως $(3,2) = (2,0) + (1,2) \notin A$, καθώς $2=3-1$). Επομένως ο A δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Εναλλακτικά, οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι το $\{0\}$, το $\mathbb{R}^2$ και οι ευθείες του $\mathbb{R}^2$ που διέρχονται από το $\{0\}$. Το A , ως συμπλήρωμα μιας ευθείας του $\mathbb{R}^2$, δεν εμπίπτει στις παραπάνω περιπτώσεις, άρα δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

ii) Το B είναι μη κενό, αφού $(0,0,0) \in B$. Δείχνουμε τώρα ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων του B είναι επίσης διάνυσμα του B . Πράγματι, έστω $u = (x_1, y_1, z_1) \in B$ και $v = (x_2, y_2, z_2) \in B$. Αυτό σημαίνει ότι $x_1 = 2y_1 = 6z_1$, $x_2 = 2y_2 = 6z_2$. Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, θεωρούμε το διάνυσμα $w = \lambda u + \mu v$. Τότε έχουμε $w = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$ και προφανώς ισχύουν οι ισότητες $\lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda(2y_1) + \mu(2y_2) = 2(\lambda y_1 + \mu y_2)$ και $\lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda(6z_1) + \mu(6z_2) = 6(\lambda z_1 + \mu z_2)$, το οποίο σημαίνει ότι $w \in B$. Άρα ο B είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

Εναλλακτικά, $B = \{(6z, 3z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(6, 3, 1)\}$, άρα ο B είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Εναλλακτικά, ο B είναι η ευθεία του $\mathbb{R}^3$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $(6, 3, 1)$, επομένως ο B είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

β)

i)

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 15z = 0\} = \{(-3y + 15z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-3, 1, 0) + z(15, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-3, 1, 0), (15, 0, 1)\}$. Τα διανύσματα $(-3, 1, 0)$ και $(15, 0, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός $\lambda(-3, 1, 0) + \mu(15, 0, 1)$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε θα είχαμε ότι $(-3\lambda + 15\mu, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$, άρα $\lambda = \mu = 0$. Επομένως το σύνολο $\{(-3, 1, 0), (15, 0, 1)\}$ αποτελεί βάση του V .

Όμοια, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\} = \{(2y, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Τα διανύσματα $(2, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός $\lambda(2, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε θα είχαμε ότι $(2\lambda, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$, άρα $\lambda = \mu = 0$. Επομένως το σύνολο $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ αποτελεί βάση του W .

ii) Το $V \cap W$ είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος
$$\begin{cases} x + 3y - 15z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$
, δηλαδή το

σύνολο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, y = 3z\} = \{(6z, 3z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(6, 3, 1)\}$. Αφού το διάνυσμα $(6, 3, 1)$ είναι μη μηδενικό, έπεται ότι το μονοσύνολο $\{(6, 3, 1)\}$ αποτελεί βάση του $V \cap W$. Επίσης, έχουμε ότι $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$ (άρα $V + W = \mathbb{R}^3$). Το άθροισμα $V + W$ δεν είναι ευθύ αφού $V \cap W \neq \{0\}$.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 12) Να εξεταστεί αν το σύνολο $V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y & y \\ 2y & x & 3y-x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $M_{2,3}(\mathbb{R})$. Αν ναι, να βρεθεί βάση του V .

β) (μον. 8) Να υπολογιστεί η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 3, 5, 7)$, $v_2 = (2, 6, 10, 1)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 1, 0, 0)$ και $v_5 = (3, 19, 0, 8)$.

Λύση της 5ης άσκησης

α) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y & y \\ 2y & x & 3y-x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} =$
 $= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$. Άρα ο V είναι ο υπόχωρος του $M_{2,3}(\mathbb{R})$ που παράγεται από τους πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Οι δύο αυτοί πίνακες είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $M_{2,3}(\mathbb{R})$, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα του $M_{2,3}(\mathbb{R})$, τότε θα είχαμε $\begin{pmatrix} \lambda + \mu & 4\mu & \mu \\ 2\mu & \lambda & 3\mu - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, άρα $\lambda = \mu = 0$. Επομένως, το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ αποτελεί βάση του V .

β) Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα δοσμένα διανύσματα. Το v_3 , ως μηδενικό διάνυσμα, έχει μηδενική συνεισφορά σε κάθε γραμμικό συνδυασμό που το περιέχει. Επομένως συμπεραίνουμε ότι $W = \text{span}\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Κάνουμε τώρα γραμμοπράξεις στον 4×4 πίνακα του οποίου οι γραμμές είναι τα τέσσερα αυτά διανύσματα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 19 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 19 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 3 & 19 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 10 & -15 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 10 & -15 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -40 & -48 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -40 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή με οδηγό σε κάθε γραμμή, άρα έχει

βαθμό 4. Επομένως, η διάσταση του W ισούται με 4 (άρα $W = \mathbb{R}^4$).

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τον πίνακα που έχει τα v_1, v_2, v_4, v_5 ως στήλες, να τον φέρουμε με γραμμοπράξεις σε κλιμακωτή μορφή και να συμπεράνουμε ότι ο βαθμός του κλιμακωτού πίνακα ισούται με 4, το οποίο σημαίνει ότι και ο βαθμός του αρχικού πίνακα ισούται με 4.