

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	15/11/2017 23:59μμ
Ακ. Έτος	2017-18	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	1	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

Ημερομηνία ανάρτησης: Πέμπτη 19 Οκτωβρίου 2017
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας: Κυριακή 12 Νοεμβρίου 2017
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής: Τετάρτη 15 Νοεμβρίου 2017¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: Κυριακή 19 Νοεμβρίου 2017

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 1^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 1 (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα)

Κεφάλαιο 2 (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάσταση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** (study.eap.gr) ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : [Σύνολα Αριθμών,](#)
[Συναρτήσεις,](#)
[Πίνακες,](#)
[Οι Χώροι \$R^n\$,](#)
[Διανυσματικοί Χώροι.](#)

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό: [Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες,](#)
[Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα,](#)
[Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα,](#)
[Κεφ4 Ορίζουσες,](#)
[Κεφ5 Οι χώροι \$R^n\$,](#)
[Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι,](#)
[Κεφ7 Βάση και Διάσταση.](#)

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- Να σας εξοικειώσει με τις πράξεις πινάκων, την εύρεση κλιμακωτής μορφής πίνακα, την επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο Gauss, τον υπολογισμό και τις ιδιότητες της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα, τα κριτήρια αντιστρεψιμότητας πινάκων και τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα (όταν υπάρχει).
- Να σας βοηθήσει στην κατανόηση των εννοιών του διανυσματικού χώρου και υποχώρου, της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων, των συνόλων γεννητόρων, των βάσεων και της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου.

**Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης της Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

A. (μον. 14) Δίνεται ο 3×3 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ και ο 3×2 πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

- Να υπολογιστούν, αν ορίζονται, οι πίνακες A^2 , AB , BA , AB^T , $A^2 + BB^T$. Αν κάποιοι από αυτούς τους πίνακες δεν ορίζονται, εξηγήστε γιατί.
- Να υπολογιστεί το ίχνος του πίνακα $5A$ και η ορίζουσα του πίνακα $2AA^T$.
- Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Αν ναι, υπολογίστε τον A^{-1} .

B. (μον. 2) Έστω C ένας 7×8 πίνακας και D ένας $m \times n$ πίνακας. Αν είναι γνωστό ότι ο $D^T C$ είναι 5×8 πίνακας, βρείτε τα m και n .

C. (μον. 4) Δίνεται ο πίνακας $E = \begin{pmatrix} c-1 & 18 & 2 \\ 0 & c & -5 \\ 0 & 0 & c+3 \end{pmatrix}$, όπου c πραγματική παράμετρος.

- Βρείτε όλες τις τιμές του c για τις οποίες ο πίνακας E είναι αντιστρέψιμος.
- Βρείτε όλες τις τιμές του c για τις οποίες ο πίνακας $(E^T E)^{1821}$ είναι αντιστρέψιμος (Υπόδειξη: μην κάνετε πολλές πράξεις).

Λύση της 1ης άσκησης

A.

i) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 18 & -6 \\ 8 & 17 & -2 \\ 16 & 16 & -5 \end{pmatrix}.$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ -2 & -6 - \sqrt{2} \\ 1 & -15 \end{pmatrix}.$$

Ο B έχει 2 στήλες και ο A έχει 3 γραμμές, άρα ο BA δεν ορίζεται.

Ο A έχει 3 στήλες και ο B^T έχει 2 γραμμές (αφού ο B έχει 2 στήλες), άρα ο AB^T δεν ορίζεται.

$$\begin{aligned} A^2 + BB^T &= \begin{pmatrix} 19 & 18 & -6 \\ 8 & 17 & -2 \\ 16 & 16 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 18 & -6 \\ 8 & 17 & -2 \\ 16 & 16 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & -3\sqrt{2} \\ 5 & -3\sqrt{2} & 27 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 18 & -1 \\ 8 & 26 & -2 - 3\sqrt{2} \\ 21 & 16 - 3\sqrt{2} & 22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε $\text{tr}(5A) = 5 \text{tr}(A) = 5(1+2+0) = 15$.

Επίσης, με ανάπτυγμα Laplace κατά τα στοιχεία της 3^{ης} στήλης, έχουμε ότι

$\det(A) = -(-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 6 = -1$. Από τις ιδιότητες των οριζουσών έπεται ότι

$$\det(2AA^T) = 2^3 \det(AA^T) = 8 \det(A) \det(A^T) = 8 \det(A) \det(A) = 8(-1)(-1) = 8.$$

iii) Αφού, όπως υπολογίσαμε παραπάνω, $\det(A) = -1 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφό του, ακολουθούμε τη μέθοδο των γραμμοπράξεων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -16 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow -r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -16 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 + 16r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 13 & 1 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow -r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -13 & -1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - 6r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -5 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -13 & -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Άρα, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -13 & -1 & 16 \end{pmatrix}$.

B. Αφού ο D^T είναι $n \times m$ πίνακας, ο C είναι 7×8 πίνακας και ορίζεται ο $D^T C$, έπεται ότι $m=7$. Αφού ο $D^T C$ είναι 5×8 πίνακας, συμπεραίνουμε ότι $n=5$.

C.

i) Ο πίνακας E είναι άνω τριγωνικός, επομένως $\det(E) = c(c-1)(c+3)$.

Άρα ο E είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $c(c-1)(c+3) \neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -3\}$.

ii) Από τις ιδιότητες των οριζουσών, έχουμε ότι

$$\det((E^T E)^{1821}) = (\det(E^T E))^{1821} = (\det(E^T) \det(E))^{1821} = (\det(E) \det(E))^{1821} = (\det(E)^2)^{1821} = \det(E)^{3642}.$$

Επομένως, ο πίνακας $(E^T E)^{1821}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det(E)^{3642} \neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\det(E) \neq 0$, δηλαδή (από το προηγούμενο υποερώτημα) αν και μόνο αν $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -3\}$.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

A. (μον. 10) Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Για καθένα από τους παραπάνω πίνακες, ελέγξτε αν είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και, σε περίπτωση που δεν είναι, βρείτε με κατάλληλες γραμμοπράξεις (τις οποίες θα υποδείξετε) την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του.

B. (μον. 10) Δίνεται ο πίνακας $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

- i) Δείξτε ότι οι τρεις πρώτες γραμμές του D είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του R^3 .
- ii) Βρείτε τον βαθμό του D .
- iii) Δείξτε ότι οι τρεις στήλες του D είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του R^4 .

Λύση της 2ης άσκησης

A.

Ο A δεν είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, διότι οι οδηγοί των μη μηδενικών γραμμών δεν ισούται με 1. Κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow \frac{1}{8}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο B δεν είναι ούτε καν σε κλιμακωτή μορφή, διότι ο οδηγός της πρώτης γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού της δεύτερης γραμμής. Κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον B σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow \frac{1}{7}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow \frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο C δεν είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, διότι το στοιχείο πάνω από τον οδηγό της δεύτερης γραμμής δεν ισούται με 0. Κάνουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον C σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B.

i) Σχηματίζουμε τον 3×3 πίνακα $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ του οποίου οι γραμμές είναι οι τρεις πρώτες γραμμές του

πίνακα D . Τότε, με ανάπτυγμα Laplace κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης, έχουμε ότι

$\det(D) = - \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = -17 + 22 = 5 \neq 0$. Επομένως, οι τρεις γραμμές του E (δηλαδή οι τρεις πρώτες γραμμές του D) είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.

ii) Από τη θεωρία, έπεται ότι $\text{rank}(D)=3$.

iii) Αφού ο D έχει τρεις στήλες και ο βαθμός του ισούται με 3, έπεται (από τη θεωρία) ότι οι στήλες του D αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

A. (μον. 10) Να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

B. (μον. 6) Έστω a, b, c πραγματικές παράμετροι. Εξηγείστε γιατί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 &= c \end{aligned}$$

έχει πάντοτε μοναδική λύση.

Γ. (μον. 4) Υπάρχει ομογενές γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους το οποίο να έχει μοναδική λύση; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Λύση της 3ης άσκησης

A. Κάνουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος ώπου να καταλήξουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - 8r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι επομένως ισοδύναμο με το

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$7x_2 + 4x_3 = 2.$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς x_2 και αντικαθιστώντας στην προτελευταία, παίρνουμε

$$x_2 = \frac{2}{7} - \frac{4}{7}x_3 \text{ και } x_1 = -\frac{2}{7} + \frac{4}{7}x_3 - x_3 = -\frac{2}{7} - \frac{3}{7}x_3. \text{ Επομένως η γενική λύση του συστήματος είναι το σύνολο}$$

$$\left\{ \left(-\frac{2}{7} - \frac{3}{7}x_3, \frac{2}{7} - \frac{4}{7}x_3, x_3 \right) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Β. Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι αντιστρέψιμος καθώς η ορίζουσά του ισούται με

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = (-9 - 3) - (18 - 12) + (2 + 4) = -12 \neq 0.$$

Επομένως, το σύστημα

$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = b$$

$$4x_1 + x_2 + 9x_3 = c$$

έχει πάντοτε μοναδική λύση.

Γ. Όχι, δεν υπάρχει. Έστω A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων. Αφού ο A έχει 3 γραμμές, έπεται ότι ο βαθμός του A είναι μικρότερος ή ίσος του 3. Αφού υπάρχουν 4 άγνωστοι, συμπεραίνουμε ότι η διάσταση του μηδενικού χώρου του A πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του $4-3=1$ (από την ενότητα 2.7 στο σύγγραμμα του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου). Με άλλα λόγια, υπάρχουν αναγκαστικά άπειρες λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος.

Άσκηση 4. (Μον. 20)

Α. (μον. 9) Να εξεταστεί αν:

- Το σύνολο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y + 3\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$.
- Το σύνολο $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + 5z\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

Β. (μον. 11) Θεωρούμε τους υπόχωρους V, W του $\mathbb{R}^3$ που ορίζονται ως εξής:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 5z = 0\} \text{ και } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

- Βρείτε βάση του V και βάση του W .
- Υπολογίστε τη διάσταση του υπόχωρου $V \cap W$.
- Δείξτε ότι $V + W = \mathbb{R}^3$.

Λύση της 4ης άσκησης

A.

i) Όχι: αφού δεν ισχύει ότι $0 \geq 0+3$, το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ δεν ανήκει στο A .

ii) Το B είναι μη κενό, αφού $(0,0,0) \in B$. Δείχνουμε τώρα ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων του B είναι επίσης διάνυσμα του B . Πράγματι, έστω $u = (x_1, y_1, z_1) \in B$ και $v = (x_2, y_2, z_2) \in B$. Τότε $x_1 = 2y_1 + 5z_1$ και $x_2 = 2y_2 + 5z_2$. Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έστω $w = \lambda u + \mu v$. Τότε $w = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$. Διαπιστώνουμε ότι $\lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda(2y_1 + 5z_1) + \mu(2y_2 + 5z_2) = 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + 5(\lambda z_1 + \mu z_2)$, γεγονός που δείχνει ότι $w \in B$. Άρα ο B είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

iii) Όχι: προφανώς $(1,0,1) \in C$ και $(0,1,1) \in C$, όμως $(1,0,1) + (0,1,1) = (1,1,2) \notin C$, αφού $1^2 + 1^2 \neq 2^2$.

B.

i)

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + 5z\} = \{(2y + 5z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1,0) + z(5,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2,1,0), (5,0,1)\}$. Τα διανύσματα $(2,1,0)$ και $(5,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός $\lambda(2,1,0) + \mu(5,0,1)$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε θα είχαμε ότι $(2\lambda + 5\mu, \lambda, \mu) = (0,0,0)$, άρα $\lambda = \mu = 0$. Επομένως το σύνολο $\{(2,1,0), (5,0,1)\}$ αποτελεί βάση του V .

Όμοια,

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y + z\} = \{(-y + z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1,1,0), (1,0,1)\}$. Τα διανύσματα $(-1,1,0)$ και $(1,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός $\lambda(-1,1,0) + \mu(1,0,1)$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε $(-\lambda + \mu, \lambda, \mu) = (0,0,0)$, άρα $\lambda = \mu = 0$. Επομένως το σύνολο $\{(-1,1,0), (1,0,1)\}$ αποτελεί βάση του W .

ii) Το $V \cap W$ είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος
$$\begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \text{ δηλαδή ο}$$

μηδενοχώρος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Φέρνουμε τον πίνακα αυτό σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
. Υπάρχουν οδηγοί και στις δύο γραμμές αυτού του 2×3 πίνακα, άρα ο βαθμός του A ισούται με 2, επομένως ο μηδενοχώρος του A έχει διάσταση $3 - 2 = 1$, δηλαδή $\dim(V \cap W) = 1$.

iii) Αφού ο $V + W$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$, συμπεραίνουμε ότι $V + W = \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 5. (Μον. 20)

A. (μον. 10) Να εξεταστεί αν το σύνολο $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ z - 2x + 3y & y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Αν ναι, να βρεθεί βάση του V .

B. (μον. 10) Θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right\}$ του διανυσματικού χώρου $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Βρείτε βάση του W .

Λύση της 5ης άσκησης

$$\text{A. } V = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ z-2x+3y & y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Επομένως, ο } V \text{ είναι ο υπόχωρος του } M_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ που παράγεται από}$$

τους πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Οι πίνακες αυτοί είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του

$M_{2,2}(\mathbb{R})$, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα του $M_{2,2}(\mathbb{R})$, τότε θα είχαμε $\begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ -2\lambda+3\mu+\nu & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, άρα $\lambda=\mu=\nu=0$. Επομένως, το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ αποτελεί βάση του V .

B. Αν ο γραμμικός συνδυασμός $\kappa \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ των διανυσμάτων

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα του W , τότε θα είχαμε

$$\begin{pmatrix} \kappa+2\mu+\nu & 2\kappa+4\mu+2\nu \\ \kappa+2\mu+\nu & 3\lambda+3\mu+6\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ δηλαδή } \begin{matrix} \kappa+2\mu+\nu=0 \\ 2\kappa+4\mu+2\nu=0 \\ 3\lambda+3\mu+6\nu=0 \end{matrix}. \text{ Από την Άσκηση 3Γ αυτής της}$$

εργασίας, έπεται ότι το σύστημα έχει μη μηδενική λύση, επομένως τα διανύσματα

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ του W είναι γραμμικά εξαρτημένα (οποιαδήποτε μη μηδενική λύση του

συστήματος μεταφράζεται σε μια μη τετριμμένη σχέση γραμμικής εξάρτησης ανάμεσα στα τέσσερα διανύσματα). Από τις λύσεις $(\kappa, \lambda, \mu, \nu) = (2, 1, -1, 0)$ και $(\kappa, \lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 0, -1)$ του παραπάνω

συστήματος ή με απλή παρατήρηση έχουμε ότι $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ άρα } \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Τέλος,}$$

τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι αν ο γραμμικός τους συνδυασμός

$$\kappa \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ήταν ίσος με το μηδενικό διάνυσμα του } W, \text{ τότε θα είχαμε } \begin{pmatrix} \kappa & 2\kappa \\ \kappa & 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ άρα}$$

$\kappa=\lambda=0$. Επομένως, το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ αποτελεί βάση του W .