



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

Ενδεικτικές Λύσεις 1^{ης} ΕΡΓΑΣΙΑΣ (κάθε άλλη ορθή λύση είναι αποδεκτή)

Ημερομηνία Ανάρτησης: 8 Οκτωβρίου 2015

Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής: 11 Νοεμβρίου 2015 (καταληκτική)

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 1^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 1 (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα)

Κεφάλαιο 2 (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάσταση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **Βοηθητικό υλικό** (study.eap.gr) ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό :
Σύνολα Αριθμών,
Συναρτήσεις,
Πίνακες,
Οι Χώροι R^n ,
Διανυσματικοί Χώροι.

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό:
Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες,
Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα,
Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα,
Κεφ4 Ορίζουσες,
Κεφ5 Οι χώροι R^n ,
Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι ,
Κεφ7 Βάση και Διάσταση.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

να σας εξοικειώσει με τις πράξεις πινάκων, την εύρεση κλιμακωτής μορφής πίνακα, τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα (είτε μέσω ιδιοτήτων ορίζουσών είτε με την μέθοδο Laplace), τα κριτήρια αντιστρεψιμότητας πίνακα και τον υπολογισμό του αντίστροφου (σε περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος), καθώς και την επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο (απαλοιφής) Gauss,

να σας βοηθήσει στην κατανόηση της δομής ενός διανυσματικού χώρου, του ελέγχου πότε ένα υποσύνολό του αποτελεί ή όχι διανυσματικό υπόχωρο του ελέγχου γραμμικής ανεξαρτησίας και εξάρτησης διανυσμάτων, συνόλων γεννητόρων και βάσεων.

Διαβάστε προσεκτικά την πλήρη εκφώνηση κάθε άσκησης.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον.6) Δίνονται οι πίνακες 1×3 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ με x πραγματικό αριθμό.

α₁) Να υπολογιστούν, αν ορίζονται, οι πίνακες A^2 , $A^T A$, $B^T B$, $AA^T + A^T A$.

α₂) Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ο πίνακας AB^T είναι μηδενικός και για αυτή την τιμή του x να υπολογιστεί το γινόμενο $(A^T A)(B^T B)$.

β) (μον.2) Αν $A \in M_{nn}(R)$ είναι κανονικός πίνακας (δηλαδή $AA^T = A^T A$) δείξτε ότι και ο $B = A + I_n$ είναι κανονικός.

γ) (μον.4) Αν $A \in M_{nn}(R)$ με $A^2 = A + I_n$, δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και εκφράστε τον A^{-1} και τον A^3 ως $\kappa I_n + \lambda A$ με κατάλληλους συντελεστές κ και λ .

δ) (μον.8) Για κάθε μία από τις ορίζουσες $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$, να βρεθούν όλες οι

πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η αντίστοιχη ορίζουσα μηδενίζεται.

Λύση της 1ης άσκησης

α₁) Το γινόμενο AA δηλαδή ο A^2 δεν ορίζεται καθώς δεν ορίζεται το γινόμενο πίνακα 1×3 (γραμμή) επί πίνακα 1×3 (γραμμή).

Βοηθητική διάταξη για το γινόμενο πινάκων:

Το γινόμενο $A^T A$, πίνακας 3×1 (στήλη) επί πίνακας 1×3 (γραμμή) δίνει πίνακα 3×3 .

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} (-1 & 2 & 1) \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$A^T A$

Το γινόμενο $B^T B$, πίνακας 3×1 (στήλη) επί πίνακας 1×3 (γραμμή) δίνει πίνακα 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \begin{vmatrix} (2 & 0 & x) \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 0 \\ 2x & 0 & x^2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$B^T B$

Καθώς AA^T είναι 1×1 και $A^T A$ είναι πίνακας 3×3 το άθροισμά τους δεν ορίζεται.

α₂)

Το γινόμενο AB^T , πίνακας 1×3 (γραμμή) επί πίνακας 3×1 (στήλη) δίνει πίνακα 1×1 .

Τελικά $AB^T = (-2+x)$.

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \\ \hline (-1 & 2 & 1) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} -2+x \end{pmatrix}$$

← $(-1)(2) + 2(0) + 1(x)$

$AB^T = 0 \Leftrightarrow (-2+x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Για την τιμή αυτή $(A^T A)(B^T B) = A^T ((A B^T) B) = A^T (0_{1 \times 1} B) = A^T 0_{1 \times 3} = 0_{3 \times 3}$.

β) Υποθέτουμε ότι $AA^T = A^T A$ και θα δείξουμε ότι και ο $B = A + I_n$ είναι κανονικός πίνακας, δηλαδή $BB^T = B^T B$.

Υπολογίζουμε :

$$BB^T = (A + I_n) \cdot (A + I_n)^T = (A + I_n) \cdot (A^T + I_n^T) = (A + I_n) \cdot (A^T + I_n) = A \cdot A^T + A \cdot I_n + I_n \cdot A^T + I_n \cdot I_n = A \cdot A^T + A + A^T + I_n \quad (1)$$

και

$$B^T B = (A + I_n)^T \cdot (A + I_n) = (A^T + I_n^T) \cdot (A + I_n) = (A^T + I_n) \cdot (A + I_n) = A^T \cdot A + A^T \cdot I_n + I_n \cdot A + I_n \cdot I_n = A^T \cdot A + A^T + A + I_n \quad (2)$$

Καθώς τα τελευταία μέλη των (1) , (2) είναι ίσα, αφού $AA^T = A^T A$, έχουμε ότι $BB^T = B^T B$. Άρα ο πίνακας B είναι κανονικός.

γ) Ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος όταν υπάρχει πίνακας B ώστε $AB=BA=I$. Από τη δοθείσα σχέση μπορούμε να γράψουμε: $A^2 = A + I \Leftrightarrow A^2 - A = I \Leftrightarrow A(A - I) = (A - I)A = I$, άρα επαληθεύεται ο ορισμός του αντιστρέψιμου πίνακα, δηλαδή ο A αντιστρέφεται και $A^{-1} = A - I$, δηλαδή $\kappa = -1, \lambda = 1$. Επίσης χρησιμοποιώντας τη σχέση για τον A^2 μπορούμε να γράψουμε:

$$A^3 = A^2 A = (A + I)A = A^2 + A = (A + I) + A = 2A + I = I + 2A, \text{ δηλαδή } \kappa = 1, \lambda = 2.$$

δ) Έχουμε διαδοχικά $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 3^2 = ((1-x)+3)((1-x)-3) = -(4-x)(x+2)$

Οπότε, η ορίζουσα Δ_1 μηδενίζεται για τις πραγματικές τιμές του x που είναι ίσες με 4 και -2.

Αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και έχουμε:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = x(x^2 + 1) - x + (-1) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Επομένως, οι πραγματικές τιμές του x που μηδενίζουν την Δ_2 είναι μόνο η τιμή ίση με 1 καθώς το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 10) Δίδονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A και να λύσετε τα γραμμικά συστήματα $AX=b_k$, $\kappa=1, 2, 3$.

β) (μον. 10) Να βρεθούν όλες οι τιμές του α για τις οποίες οι παρακάτω πίνακες είναι γραμμοϊσοδύναμοι.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 4 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Λύση της 2ης άσκησης

α) Βρίσκουμε τον αντίστροφο του πίνακα A ακολουθώντας (για παράδειγμα) την μέθοδο της Ανηγμένης Κλιμακωτής Μορφής (ΑΚΜ) του επαυξημένου πίνακα $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 \leftarrow r_1 - r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - 2r_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - 4r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \text{ . Άρα ο } A^{-1} \text{ είναι ο } \left(\begin{array}{ccc} 7 & -11 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \text{ .}$$

Αφού ο A αντιστρέφεται, τα γραμμικά συστήματα $AX=b_k$, $k=1,2,3$, έχουν μοναδική λύση που βρίσκεται όταν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με τον A^{-1} και τα δύο μέλη:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}b_k \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}b_k \Leftrightarrow I_3 X = A^{-1}b_k \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot b_k, \quad k=1,2,3.$$

Έχουμε διαδοχικά την λύση κάθε συστήματος:

$$\text{Για } k=1: X = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + (-11) \cdot 1 + 1 \cdot 100 \\ (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 100 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα το σύστημα $AX=b_1$ έχει σύνολο λύσεων το μονοσύνολο $\{(x_1, x_2, x_3) = (96, 1, 0)\}$.

$$\text{Για } k=2: X = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot (-1) + (-11) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα $AX=b_2$ έχει σύνολο λύσεων $\{(x_1, x_2, x_3) = (-26, 8, -3)\}$.

$$\text{Για } k=3: X = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 4 + (-11) \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \\ 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα $AX=b_3$ έχει σύνολο λύσεων $\{(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)\}$.

β) Με πράξεις στις γραμμές έχουμε την ΑΚΜ του B_1

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ r_1 \leftarrow r_1 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και για τον B_2 την παρακάτω ΚΜ (σχεδόν ΑΚΜ):

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 4 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow \frac{1}{4}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & a-4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftarrow -r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4-a \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 1 & -1 & 4-a \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{pmatrix}.$$

Από τις παραπάνω μορφές προκύπτει ότι: αν $a-3 \neq 0$, δηλαδή $a \neq 3$, τότε οι πίνακες δεν είναι γραμμοϊσοδύναμοι καθώς έχουν διαφορετική τάξη (βαθμό, rank) ενώ αν $a-3=0$, δηλαδή $a=3$, οι πίνακες έχουν **ίδια** ΑΚΜ άρα είναι γραμμοϊσοδύναμοι καθώς αν δύο πίνακες είναι γραμμοϊσοδύναμοι προς ένα τρίτο πίνακα είναι και μεταξύ τους.

Επομένως για $a=3$ και μόνο γι' αυτή την τιμή οι πίνακες B_1 και B_2 είναι γραμμοϊσοδύναμοι.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί.

α) (μον. 8) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο απαλοιφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα α, β, γ ώστε το σύστημα $AX = B$ να έχει λύση.

β) (μον.12) Είναι το σύστημα $(A^T A)X = A^T B$ πάντα συμβιβαστό;

Λύση της 3ης άσκησης

α) Βρίσκουμε γραμμο-ισοδύναμη μορφή του επαυξημένου πίνακα που αντιστοιχεί σε κλιμακωτή μορφή του πίνακα συντελεστών ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 2 & 0 & \gamma \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & \beta - \gamma \\ 0 & 3 & -3 & \gamma - \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftarrow -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \gamma - \beta \\ 0 & 3 & -3 & \gamma - \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \gamma - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 3\beta - \alpha - 2\gamma \end{array} \right)$$

Από την κλιμακωτή αυτή μορφή του επαυξημένου πίνακα έχουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το σύστημα είναι $\boxed{3\beta - \alpha - 2\gamma = 0}$.

β) Υπολογίζουμε

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & -1+1+2 & 3+1+0 \\ -1+1+2 & 1+1+4 & -3+1+0 \\ 3+1+0 & -3+1+0 & 9+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix},$$

και $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ -\alpha + \beta + 2\gamma \\ 3\alpha + \beta + 0\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ -\alpha + \beta + 2\gamma \\ 3\alpha + \beta \end{pmatrix}.$

Βρίσκουμε μία κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα $(A^T A \mid A^T B)$ με πράξεις στις γραμμές:

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 4 & \alpha + \beta + \gamma \\ 2 & 6 & -2 & -\alpha + \beta + 2\gamma \\ 4 & -2 & 10 & 3\alpha + \beta \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_1 \leftarrow \gamma_1 - \gamma_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 6 & 2\alpha - \gamma \\ 2 & 6 & -2 & -\alpha + \beta + 2\gamma \\ 4 & -2 & 10 & 3\alpha + \beta \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_2 \leftarrow \gamma_2 - 2\gamma_1} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 6 & 2\alpha - \gamma \\ 0 & 14 & -14 & -5\alpha + \beta + 4\gamma \\ 4 & -2 & 10 & 3\alpha + \beta \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_3 \leftarrow \gamma_3 - 4\gamma_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 6 & 2\alpha - \gamma \\ 0 & 14 & -14 & -5\alpha + \beta + 4\gamma \\ 0 & 14 & -14 & -5\alpha + \beta + 4\gamma \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_3 \leftarrow \gamma_3 - \gamma_2} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 6 & 2\alpha - \gamma \\ 0 & 14 & -14 & -5\alpha + \beta + 4\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_2 \leftarrow \frac{1}{14}\gamma_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 6 & 2\alpha - \gamma \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{14}(-5\alpha + \beta + 4\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι το σύστημα μας είναι συμβιβαστό πάντα (δηλαδή για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

Άσκηση 4. (Μον.20)

α) (10 μον.) Θεωρούμε τους υπόχωρους V, W του $\mathbb{R}^3$ που ορίζονται ως εξής :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y + z = 0\} \text{ και } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}.$$

α₁) Να βρείτε βάση της τομής των υποχώρων $W \cap V$, βάση του V και βάση του W .

α₂) Ισχύει ότι ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι το ευθύ άθροισμα των V και W ;

β) (10 μον.) Θεωρούμε τον υπόχωρο U_1 του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,1,0)$ και $(1,2,1,3)$ και τον υπόχωρο U_2 που παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,1,1)$ και $(2,0,2,1)$.

Να βρεθεί βάση και διάσταση για κάθε ένα από τους υποχώρους $U_1, U_2, U_1 + U_2$.

Λύση της 4ης άσκησης

(α₁) Εξ ορισμού, η τομή των δύο υποχώρων V, W είναι

$$W \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y + z = 0 \text{ και } x + 2y + z = 0\}$$

δηλαδή ο χώρος λύσεων του γραμμικού ομογενούς συστήματος
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Εκτελούμε στον επαυξημένο πίνακα του παραπάνω συστήματος εύκολα τις γραμμοπράξεις:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 / 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array} \right)$$

οπότε από την ΑΚΜ οι λύσεις είναι $(x, y, z) = (0, -z/2, z) = (-z/2)(0, 1, -2)$, z αυθαίρετο.

Επομένως, $W \cap V = \text{span}\{(0, 1, -2)\}$ και επειδή το $(0, 1, -2) \neq \mathbf{0}$,

μία βάση της τομής $W \cap V$ είναι το μονοσύνολο $\{(0, 1, -2)\}$.

Για τον V : Αφού $2x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow z = -2x - 2y$, $(x, y, z) = (x, y, -2x - 2y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -2)$ (*), $V = \text{span}\{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}$. Επιπλέον, το σύνολο $\{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αφού από την (*) άμεσα έχουμε $x(1, 0, -2) + y(0, 1, -2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$. Επομένως,

μία βάση του V είναι το σύνολο $\{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}$.

Για τον W : Αφού $x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - 2y$, $(x, y, z) = (x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$ (**), $W = \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$. Επιπλέον, το σύνολο $\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αφού από την (**) άμεσα έχουμε $x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$. Επομένως,

μία βάση του W είναι το σύνολο $\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$.

(α₂) Για να είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$ ευθύ άθροισμα των V, W πρέπει $\dim \mathbb{R}^3 = \dim V + \dim W$. Γνωρίζουμε ότι η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, δηλαδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Από το (α₁) έχουμε $\dim V = 2$ και $\dim W = 2$. Οπότε, $\dim V + \dim W = 2 + 2 = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Άρα,

ο $\mathbb{R}^3$ δεν είναι ευθύ άθροισμα των V, W .

(β) Για τον U_1 : Καθώς τα διανύσματα $(1,0,1,0)$ και $(1,2,1,3)$ που παράγουν τον U_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού είναι μη μηδενικά και το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου

(αναλυτικότερα $\kappa(1,0,1,0) + \lambda(1,2,1,3) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (\kappa + \lambda, 2\lambda, \kappa + \lambda, 3\lambda) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 0$)

το σύνολο $\{(1,0,1,0), (1,2,1,3)\}$ είναι βάση του U_1 και άρα η διάστασή του είναι $\dim U_1 = 2$.

Για τον U_2 : Παρόμοια, καθώς τα διανύσματα $(1,0,1,1)$ και $(2,0,2,1)$ που παράγουν τον U_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού είναι μη μηδενικά και το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου,

το σύνολο $\{(1,0,1,1), (2,0,2,1)\}$ είναι βάση του U_2 , και άρα η διάστασή του είναι $\dim U_2 = 2$.

Για τον $U_1 + U_2$: Ο χώρος $U_1 + U_2$ παράγεται από την ένωση των συνόλων γεννητόρων των U_1 και U_2 , δηλαδή παράγεται από το σύνολο $\{(1,0,1,0), (1,2,1,3), (1,0,1,1), (2,0,2,1)\}$. Για να βρούμε μία βάση του μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής μέθοδο:

Θεωρούμε τον πίνακα με γραμμές τα διανύσματα αυτά και βρίσκουμε μία κλιμακωτή μορφή του:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι μη μηδενικές γραμμές της ΚΜ είναι εμφανώς γραμμικά ανεξάρτητες (λόγω της κλιμακωτής μορφής) και παράγουν τον χώρο γραμμών του αρχικού πίνακα. Άρα,

το σύνολο $\{(1,0,1,0), (0,2,0,3), (0,0,0,1)\}$ είναι μία βάση του $U_1 + U_2$ και $\dim(U_1 + U_2) = 3$.

Άσκηση 5. (Μον. 20)

α) (μον. 2+3) Για κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα να εξετάσετε αν αποτελούν υπόχωρο και να δώσετε μία βάση και τη διάσταση στην περίπτωση που είναι:

i) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x + 1\}$, υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^2$,

ii) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, υποσύνολο του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$.

β) (μον. 7) Δείξτε ότι το σύνολο $S = \{(x+1)^2, x+1, 1\}$ είναι βάση του χώρου των πολωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 2 ως προς x και γράψτε το πολώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ ως γραμμικό συνδυασμό της S .

γ) (μον. 8) Εξετάστε την γραμμική ανεξαρτησία του συνόλου $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ που

είναι υποσύνολο του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$, χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των στοιχείων του στην συνήθη διατεταγμένη βάση του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$, $B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Σε περίπτωση που το σύνολο A δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο να βρεθεί μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του ίσος προς το μηδενικό στοιχείο του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$.

Λύση της 5ης άσκησης

(α) (i) Για να είναι ο U υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, πρέπει να περιέχει το $(0,0)$. Όμως αν $(x, y) \in U$, τότε $y = 2x + 1$, άρα: $(0,0) = (x, y) \in U \Leftrightarrow (x, 2x + 1) = (0,0) \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ και } 2x + 1 = 0\}$, αδύνατο. Άρα, επειδή $(0,0) \notin U$, U δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

(ii) Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του υποσυνόλου V γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x+y & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Αρα, $V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.1 (βλ. βιβλίο ΕΑΠ, Γραμμική

Άλγεβρα, σελ. 88), το υποσύνολο V είναι υπόχωρος του χώρου $M_{22}(R)$. Επιπλέον, το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αφού άμεσα από την (1) έχουμε:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Οπότε, το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ είναι μία βάση του V και $\dim V = 2$.

Σημείωση: Μπορούμε να δείξουμε ότι ο V είναι υπόχωρος με χρήση του ορισμού αλλά εδώ είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο V είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

(β) Επειδή $\dim \mathbb{P}_2(R) = 3$ (συνήθης βάση $\{1, x, x^2\}$) και $S \subset \mathbb{P}_2(R)$ με τρία στοιχεία, για να είναι το S βάση του $\mathbb{P}_2(R)$ **αρκεί** να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Καθώς ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma &= \mathbf{0} (\equiv 0x^2 + 0x + 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha x^2 + 2\alpha x + \alpha + \beta x + \beta + \gamma &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta + \gamma) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0, \end{aligned}$$

το σύνολο S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Για να εκφράσουμε το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ ως γραμμικό συνδυασμό του S αρκεί να βρούμε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε $3x^2 + 2x + 1 = \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma$. Η σχέση αυτή ισοδυναμεί με

$$3x^2 + 2x + 1 = \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta + \gamma) \text{ και τελικά με το σύστημα } \begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} \text{ το οποίο με}$$

αντικατάσταση από πάνω προς τα κάτω δίνει την μοναδική λύση $\alpha = 3, \beta = -4, \gamma = 2$.

Αρα $3x^2 + 2x + 1 = 3(x+1)^2 - 4(x+1) + 2$.

Σημείωση: εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε τον πίνακα μετάβασης μεταξύ της συνήθους βάσης και της S . Πρακτικά επίσης μπορεί κανείς να γράψει το x ως $(x+1) - 1$ και να αναπτύξει διατηρώντας δυνάμεις του $(x+1)$.

(γ) Οι στήλες συντεταγμένων των δοθέντων πινάκων του A

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \Pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \Pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

ως προς την δοθείσα διατεταγμένη βάση είναι αντιστοίχως:

$$[\Pi_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\Pi_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, [\Pi_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\Pi_4]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε την ΑΚΜ του πίνακα που έχει ως στήλες τις στήλες συντεταγμένων των δοθέντων πινάκων :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow -R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{R_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η τέταρτη στήλη είναι γραμμικός συνδυασμός των τριών πρώτων οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ειδικότερα **4^η στήλη = (-1) 1^η στήλη + (2) 2^η στήλη + (-1) 3^η στήλη**. Επομένως,

το σύνολο A δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και ένας μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του, ίσος προς το μηδενικό στοιχείο του χώρου $M_{22}(R)$, είναι:

$$(-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = O_{2 \times 2}.$$
