

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 7 Ιουλίου 2017, 18:00 - 21:30

Οι απαντήσεις είναι ενδεικτικές. Οποιαδήποτε άλλη σωστή απάντηση είναι αποδεκτή.**Θέμα 1**

1α) (10 μονάδες) Έστω A ένας 3×3 πίνακας και b ένας 3×1 πίνακας. Δίνεται ότι το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ έχει επαυξημένο πίνακα με κλιμακωτή μορφή:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Να λυθούν: α) το σύστημα $Ax = b$ και β) το αντίστοιχο ομογενές $Ax = 0$. Επίσης, να βρεθεί ο βαθμός του A .

1β) (10 μονάδες) Θεωρούμε τους υπόχωρους V, W που ορίζονται ως εξής:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\} \quad \text{και} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\}.$$

Να βρεθούν: α) μία βάση του V , β) μία βάση του W και γ) μία βάση της τομής $V \cap W$.

Απάντηση:

1α) Τα οδηγία στοιχεία της κλιμακωτής μορφής του επαυξημένου πίνακα E βρίσκονται στις πρώτες δύο στήλες του, άρα οι μεταβλητές x_1, x_2 είναι δεσμευμένες και η μεταβλητή x_3 είναι ελεύθερη. Με προς τα πίσω αντικατάσταση, από την 2η και 1η γραμμή του E αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι $x_2 = 2 - 3x_3$ και $x_1 = 8 + 7x_3$. Άρα, η λύση του συστήματος $Ax = b$ δίνεται από το σύνολο $\{(8 + 7x_3, 2 - 3x_3, x_3)^T : x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Αντικαθιστώντας την τελευταία στήλη της κλιμακωτής μορφής του επαυξημένου πίνακα από τη μηδενική στήλη και εργαζόμενοι όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι η λύση του συστήματος $Ax = 0$ δίνεται από το σύνολο $\{(7x_3, -3x_3, x_3)^T : x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Επειδή υπάρχουν δύο οδηγία στοιχεία στην κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα και επειδή οι γραμμοπράξεις δεν μεταβάλλουν το βαθμό ενός πίνακα, συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός του A ισούται με 2.

1β) Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$v = (x, y, z) \in V \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z \Leftrightarrow v = (-y - z, y, z) = y \underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + z \underbrace{(-1, 0, 1)}_{v_2}.$$

Άρα τα διανύσματα v_1, v_2 παράγουν το χώρο V . Επιπλέον, τα v_1, v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επειδή

$$\begin{aligned} av_1 + bv_2 = 0_3 &\Leftrightarrow a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (-a - b, a, b) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = b = 0. \end{aligned}$$

Επομένως μία βάση του V είναι η εξής: $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Παρόμοια:

$$w = (x, y, z) \in W \Leftrightarrow x - y - z = 0 \Leftrightarrow x = y + z \Leftrightarrow w = (y + z, y, z) = y \underbrace{(1, 1, 0)}_{w_1} + z \underbrace{(1, 0, 1)}_{w_2}.$$

Άρα τα διανύσματα w_1, w_2 παράγουν τον χώρο W . Επιπλέον, τα w_1, w_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επειδή

$$aw_1 + bw_2 = 0_3 \Leftrightarrow a(1,1,0) + b(1,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (a+b, a, b) = (0,0,0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Επομένως μία βάση του W είναι η εξής: $\{(1,1,0), (1,0,1)\}$.

Για την τομή έχουμε:

$$q = (x, y, z) \in V \cap W \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ (y + z) + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z + z = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}.$$

Συνεπώς $q = (0, -z, z) = z \underbrace{(0, -1, 1)}_{q_1}$, $z \in \mathbb{R}$. Άρα το διάνυσμα q_1 παράγει τον χώρο $V \cap W$. Επειδή το

$q_1 = (0, -1, 1)$ είναι μη μηδενικό αποτελεί βάση του χώρου $V \cap W$. Έτσι μία βάση της τομής $V \cap W$ είναι η $\{(0, -1, 1)\}$.

Θέμα 2

2α) (8 μονάδες) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση: $f(x, y) = (2x - y, -x + 2y)$. Να βρεθεί ο πίνακας αναπαράστασης A της f ως προς τη συνήθη (διατεταγμένη) βάση του $\mathbb{R}^2$. Επίσης, να βρεθούν βάση και διάσταση για τον πυρήνα $\text{Ker } f$ και την εικόνα $\text{Im } f$ της f και να εξεταστεί αν η f είναι 1-1 και επί.

2β) (12 μονάδες) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A και να δειχθεί ότι διαγωνοποιείται. Επίσης, να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^T A P = D$ όπου D διαγώνιος πίνακας. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες P και D να δοθεί ο πίνακας A^m για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό m .

Απάντηση:

2α) Έχουμε ότι:

$$f(1, 0) = (2, -1) = 2(1, 0) - 1(0, 1),$$

$$f(0, 1) = (-1, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1).$$

Επομένως ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης ως προς τη συνήθη βάση είναι ο εξής: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Για τον πυρήνα $\text{Ker } f$ της γραμμικής απεικόνισης f έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x - y, -x + 2y) = (0, 0)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0 \text{ και } -x + 2y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \text{ και } -x + 2(2x) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \text{ και } 3x = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y = 0\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς $\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y = 0\} = \{(0, 0)\}$ και επομένως $\dim \text{Ker } f = 0$.

Έτσι με βάση το Θεώρημα της διάστασης θα έχουμε ότι:

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f \Leftrightarrow 2 = 0 + \dim \text{Im } f \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = 2.$$

Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης f γράφεται ως εξής:

$$f(x, y) = (2x - y, -x + 2y) = x \underbrace{(2, -1)}_{v_1} + y \underbrace{(-1, 2)}_{v_2}$$

Συνεπώς τα διανύσματα v_1, v_2 παράγουν τον χώρο $\text{Im } f$, τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εφόσον ισχύει $\dim \text{Im } f = 2$. Άρα $\text{Im } f = \{(2, -1), (-1, 2)\}$.

Επειδή ισχύει ότι $\dim \text{Ker } f = 0$ η απεικόνιση είναι 1-1. Επίσης, επειδή ισχύει ότι $\dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση είναι επί.

Β' Τρόπος: Βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή (ΑΚΜ) του πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης ως προς τη συνήθη βάση:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 \frac{1}{2}, r_2 \leftarrow r_2 \frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 + r_2 \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y = 0\} = \{(0, 0)\}$ και επομένως $\dim \text{Ker } f = 0$. Επειδή η τάξη του πίνακα A είναι 2 η f είναι επί και μια βάση της $\text{Im } f$ είναι η συνήθης βάση $\{(1, 0), (0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^2$. Επειδή $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$ η f είναι και 1-1.

2β) Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου πίνακα ως συμμετρικός και πραγματικός. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (-\lambda-1)(-\lambda+3).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι -1 και 3 . Για κάθε μία ιδιοτιμή βρίσκουμε βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου.

Για $\lambda = -1$ έχουμε $2x_1 - 2x_2 = 0$ και έτσι $x_1 = x_2$.

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = -1$ είναι: $V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Για $\lambda = 3$ έχουμε: $x_1 = -x_2$.

Άρα, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = 3$ είναι: $V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$

Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A είναι διακεκριμένες (όλες διαφορετικές) και επομένως τα δύο βασικά ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Οπότε κανονικοποιούμε το κάθε ιδιοδιάνυσμα και σχηματίζουμε τον παρακάτω ορθογώνιο πίνακα P (ισχύει $PP^T = P^T P = I$):

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ ο οποίος είναι ο ζητούμενος πίνακας διότι ισχύει ότι: } P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

Από τη σχέση $P^T A P = D$ επειδή ισχύει ότι $PP^T = P^T P = I$ έχουμε $A = P D P^T$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι:

$$A^m = (P D P^T)^m = P D^m P^T, \quad \text{όπου} \quad D^m = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}.$$

Θέμα 3

3α) (5 μονάδες) Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n \sin \frac{2}{n}$, **ii)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+5x} - \sqrt{3+x}}{x}$.

3β) (5 μονάδες) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές: **i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^3}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε για το **i)** το κριτήριο λόγου και για το **ii)** p -σειρές και απόλυτη σύγκλιση.

3γ) (5 μονάδες) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)3^n}$.

Σημείωση: Να εξεταστεί η σύγκλιση και στα άκρα του διαστήματος.

3δ) (5 μονάδες) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+2x)$. Αντικαθιστώντας στο γενικό τύπο του αναπτύγματος MacLaurin τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x)$ και των παραγώγων της να δοθεί το προσεγγιστικό πολυώνυμο MacLaurin βαθμού n . Επίσης, να χρησιμοποιηθεί το αντίστοιχο πολυώνυμο βαθμού $n=3$ για να υπολογιστεί προσεγγιστικά η τιμή $\ln(1.4)$.

Απάντηση:

3α) i) Θεωρούμε το όριο της αντίστοιχης συνάρτησης και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8 \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 8 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{x^2} \cos\left(\frac{2}{x}\right)}{-\frac{2}{x^2}} = 8 \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 8.$$

3α) ii) Έχουμε διαδοχικά τα εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+5x} - \sqrt{3+x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+5x} - \sqrt{3+x})(\sqrt{3+5x} + \sqrt{3+x})}{x(\sqrt{3+5x} + \sqrt{3+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+5x - (3+x)}{x(\sqrt{3+5x} + \sqrt{3+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{3+5x} + \sqrt{3+x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

3β) i) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου με $\alpha_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Έχουμε:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e} < 1,$$

(λόγω του ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$). Άρα η σειρά συγκλίνει.

3β) ii) Θεωρούμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sin n}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|$. Έτσι, αν $\alpha_n = \frac{\sin n}{n^3}$ τότε $|\alpha_n| = \left| \frac{\sin n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} = \beta_n$.

Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ συγκλίνει (ως p -σειρά με $p=3>1$). Επομένως λόγω του κριτηρίου σύγκρισης

συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|$, (δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n^3}$ συγκλίνει απόλυτα). Άρα, η δοθείσα σειρά συγκλίνει λόγω του ότι η απόλυτη σύγκλιση εξασφαλίζει τη σύγκλιση

3γ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου και έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+3)3^{n+1}}}{\frac{(x+1)^n}{(n+2)3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}(n+2)3^n}{(x+1)^n(n+3)3^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)(n+2)}{3(n+3)} \right| = \frac{1}{3}|x+1|.$$

Επομένως για:

1) $\frac{1}{3}|x+1| < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$ η σειρά συγκλίνει.

2) $\frac{1}{3}|x+1| > 1 \Leftrightarrow x < -4$ ή $x > 2$ η σειρά αποκλίνει.

3) Αν $x = -4$ η σειρά γίνεται: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(n+2)3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)}$ η οποία συγκλίνει καθώς είναι εναλλάσσουσα ακολουθία που έχει γενικό όρο $\frac{1}{n+2}$, η οποία είναι ακολουθία θετικών όρων, φθίνουσα και τείνει στο 0 (κριτήριο Leibniz).

4) Αν $x = 2$ η σειρά αποκλίνει αφού καταλήγει στην αρμονική σειρά: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+2)3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Συνεπώς το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)3^n}$ είναι το $[-4, 2)$.

3δ) Έχουμε $f(x) = \ln(1+2x)$, οπότε:

$$f(x) = \ln(1+2x) \Rightarrow f(0) = \ln(1+2 \cdot 0) = 0.$$

$$f'(x) = 2 \frac{1}{1+2x} \Rightarrow f'(0) = 2 \frac{1}{1+2 \cdot 0} = 2.$$

$$f''(x) = 2(-1) \frac{1}{(1+2x)^2} \Rightarrow f''(0) = 2^2(-1) \frac{1}{(1+2 \cdot 0)^2} = 2^2(-1) = 2^2(-1)^1.$$

$$f^{(3)}(x) = 2^2(-1)(-2) \frac{1}{(1+2x)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2^3(-1)(-2) \frac{1}{(1+2 \cdot 0)^3} = 2^3 2! (-1)^2.$$

Έτσι επαγωγικά μπορούμε να πάρουμε:

$$f^{(n)}(x) = 2^n (-1)(-2) \cdots (-(n-1)) \frac{1}{(1+2x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 2^n (n-1)! (-1)^{n-1}.$$

Άρα, το προσεγγιστικό πολυώνυμο Maclaurin βαθμού n της συνάρτησης $f(x) = \ln(1+2x)$ είναι το εξής:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{2^k (k-1)! (-1)^{k-1}}{k!} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (2x)^k = \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} (2x)^n. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο 3^{ov} βαθμού $P_3(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$ έχουμε ότι:

$$\ln(1.4) = \ln(1+2 \cdot 0.2) = f(0.2) \simeq P_3(0.2) = 2 \cdot 0.2 - 2 \cdot (0.2)^2 + \frac{8}{3}(0.2)^3 \simeq 0.3413.$$

Σημειώνουμε ότι η πραγματική τιμή είναι $\ln(1.4) \simeq 0.3365$.

Θέμα 4

4α) (10 μονάδες) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \frac{1}{x-1}$. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τα τοπικά ακρότατα, τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες, τη μονοτονία και την κυρτότητα και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

4β) (5 μονάδες) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2 + 3x + 6}{(x+1)(x-1)^2} dx$.

Υπόδειξη: Να γίνει ανάλυση σε απλά κλάσματα της μορφής $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.

4γ) (5 μονάδες) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^2 \ln x dx$ και να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 \ln x dx$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα με κατά παράγοντες ολοκλήρωση και στη συνέχεια να εξεταστεί η σύγκλιση του ολοκληρώματος.

Απάντηση:

4α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Επίσης για $x=0$ έχουμε $f(x)=1$ και ότι οι ρίζες της $f(x)$ είναι η $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$ και η $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618034$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} \text{ και } f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}.$$

Η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις και η πρώτη παράγωγος δεν ορίζεται στο σημείο $x=1$ το οποίο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Συνεπώς, δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

Η εξίσωση $f''(x)=0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις και η δεύτερη παράγωγος δεν ορίζεται στο σημείο $x=1$, συνεπώς δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

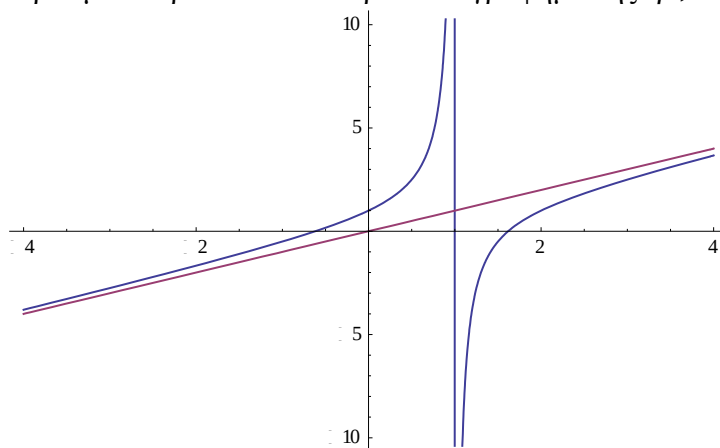
Η ευθεία $x=1$ είναι κάθετη ασύμπτωτη της f . Για να βρούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες $y=mx+b$ υπολογίζουμε τους συντελεστές m και b ως εξής:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x(x-1)} \right) = 1 \text{ και } b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x-1} = 0.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη.

Η πρώτη παράγωγος είναι παντού θετική, άρα η συνάρτηση είναι πάντα αύξουσα. Επίσης, είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, συνεπώς η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) για $x < 1$ και κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) για $x > 1$.

Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτει το παρακάτω γράφημα της f :



4β) Σύμφωνα με την υπόδειξη και για $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ έχουμε:

$$\frac{x^2 + 3x + 6}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Από την ισότητα των κλασμάτων προκύπτει ότι $x^2 + 3x + 6 = (A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C)$.

Εξισώνοντας τους συντελεστές των (ίσων) πολυωνύμων προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ -2A+C = 3 \\ A-B+C = 6 \end{cases} \text{ του οποίου η λύση είναι η } A=1, \quad B=0, \quad C=5.$$

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα δίνεται ως εξής:

$$\int \frac{x^2 + 3x + 6}{(x+1)(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + 5 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln |x+1| - \frac{5}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

4γ) Παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται για $x > 0$ και σύμφωνα με την υπόδειξη για το αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \int \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι α' είδους και υπολογίζεται μέσω του παραπάνω αόριστου ολοκληρώματος.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \ln x dx &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^1 x^2 \ln x dx = \left[\lim_{k \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c \right) \right]_k^1 = \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{9} + c - \lim_{k \rightarrow 0^+} \left(\frac{k^3}{3} \ln k - \frac{1}{9} k^3 + c \right) = \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow 0^+} k^3 \ln k. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας κανόνα L' Hospital μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο στην παραπάνω σχέση, που είναι

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} k^3 \ln k \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\ln k}{\frac{1}{k^3}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{-3}{k^4}} = -\frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow 0^+} k^3 = 0.$$

Συνεπώς $\int_0^1 x^2 \ln x dx = -\frac{1}{9}$, άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Θέμα 5

5α) (10 μονάδες) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X και να υπολογιστούν οι τιμές των $E(X)$, $E(X^2)$ και $Var(X)$.

5β) (10 μονάδες) Στις πρόσφατες πανελλαδικές εξετάσεις η βαθμολογία στα Μαθηματικά στην ομάδα προσανατολισμού θετικών σπουδών ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αν είναι γνωστό ότι το 2% των μαθητών έγραψε πάνω από 19 ενώ το 26% των μαθητών έγραψε κάτω από 5 να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών.

Σημείωση: $\Phi(0.64) = 0.74$, $\Phi(2.05) = 0.98$

Απάντηση:

5α) Θα πρέπει να ισχύει ότι $ax^2(1-x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$. Επειδή ισχύει $(1-x) > 0$ συμπεραίνουμε ότι $a > 0$. Επίσης θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 ax^2(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = a \int_0^1 x^2(1-x) dx = \\ &= a \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = a \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = a \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{a}{12}. \end{aligned}$$

Συνεπώς θα πρέπει να ισχύει ότι $a/12 = 1$. Επομένως η ζητούμενη τιμή είναι η $a = 12$.

Οι ζητούμενες τιμές των $E(X)$, $E(X^2)$ και $Var(X)$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^{+\infty} x f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 12x^3(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = 12 \int_0^1 x^3(1-x) dx = \\ &= 12 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = 12 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 12 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{20}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 12x^4(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = 12 \int_0^1 x^4(1-x) dx = \\ &= 12 \int_0^1 (x^4 - x^5) dx = 12 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 12 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{12}{30}. \end{aligned}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \left(\frac{12}{30} \right) - \left(\frac{12}{20} \right)^2 = \frac{12}{30} - \frac{144}{400} = \frac{4800 - 4320}{12000} = \frac{480}{12000} = \frac{1}{25}.$$

5β) Έστω X η βαθμολογία στα Μαθηματικά στην ομάδα προσανατολισμού θετικών σπουδών η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ .

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(X > 19) &= 0.02 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.02 \Rightarrow P\left(Z > \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.02 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.98 \Rightarrow \frac{19 - \mu}{\sigma} = 2.05. \end{aligned}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(X < 5) &= 0.26 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5 - \mu}{\sigma}\right) = 0.26 \Rightarrow P\left(Z < \frac{5 - \mu}{\sigma}\right) = 0.26 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\mu - 5}{\sigma}\right) = 0.26 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\mu - 5}{\sigma}\right) = 0.74 \Rightarrow \frac{\mu - 5}{\sigma} = 0.64. \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{19 - \mu}{\sigma} = 2.05 \\ \frac{\mu - 5}{\sigma} = 0.64 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2.05\sigma + \mu = 19 \\ 0.64\sigma - \mu = -5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2.05\sigma + \mu = 19 \\ 2.69\sigma = 14 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2.05\sigma + \mu = 19 \\ \sigma = \frac{14}{2.69} = 5.2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 19 - 2.05 \times 5.2 = 8.34 \\ \sigma = \frac{14}{2.69} = 5.2 \end{array} \right\}.$$

Οπότε οι ζητούμενες τιμές είναι $\mu = 8.34$ (για τη μέση τιμή) και $\sigma = 5.2$ (για την τυπική απόκλιση).