

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ΠΛΗ 12
1^η Εργασία 2016-2017

Σύνταξη – επιμέλεια

Παντελής . Π . Προδρομίδης

Σολωμού 29 Αθήνα

τηλ. 6942047218

email p27prodromidis@gmail.com

Άσκηση 1 Λύση: Α) Το γινόμενο $A \cdot A$ θα ληθεί ο A^2 ορίζεται

$$\text{και έχουμε: } A A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Επιπλέον: } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 1 \\ 40 & 5 & -23 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$

$$B A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \text{Δεν ορίζεται η πράξη}$$

$2 \times 3 \quad 2 \times 2$

Ο αριθμός των στηλών του πίνακα B είναι διégορος του αριθμού των γραμμών του πίνακα A

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -5 & 11 \\ 40 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$B^T B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 20 & -20 \\ 20 & 5 & 1 \\ -20 & 1 & 29 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \quad 2 \times 3$

$$B B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -8 \\ -8 & 108 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 2$

$$B^T B + B B^T = \begin{pmatrix} 100 & 20 & -20 \\ 20 & 5 & 1 \\ -20 & 1 & 29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 & -8 \\ -8 & 108 \end{pmatrix} =$$

= Δεν ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης, πίνουμε

Σιγαστική Δίεση

B) Έχουμε διόρθωση

$$A + B C = D \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1/2 \\ 7 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 5/2 \\ -47 & 25 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & 1/2 + 5b \\ 10a - 14 & 21 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 5/2 \\ -47 & 25 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} + 5b \\ 10a - 17 & 25 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 5/2 \\ -47 & 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} + 5b = \frac{5}{2} \\ 10a - 17 = -47 \\ 25 - 2b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 0 \\ 10a = -30 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

Τελικά $a = -3$, $b = 0$

$$\begin{aligned} \text{C) i/ } |X| &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -3(10 - 0) - 1(0 - 24) = -30 + 24 = -6 \end{aligned}$$

ii/ Επειδή $|X| = -6 \neq 0$ ο πίνακας X είναι

αντιστρέψιμος. Υπολογισμός του πίνακα X^{-1}

Ο αντίστροφος πίνακας δίνεται από τη σχέση

$$X^{-1} = \frac{1}{|X|} \text{adj}(X) \quad (1)$$

Ο πίνακας $\text{adj}(X)$ (προσαρτημένος πίνακας του X)

υπολογίζεται με τα ακόλουθα συμπληρώματα

$$X_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

όπου M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα που αντιστοιχεί στο

στοιχείο x_{ij} του πίνακα X . Έχουμε διδαχτεί

$$X_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10, \quad X_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$X_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 24, \quad X_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$X_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12, \quad X_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$X_{31} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad X_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$X_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Ετσι

$$\alpha_{ij}(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} :$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -5 & 4 \\ 24 & -15 & 12 \\ -12 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

οπότε από την (2) με $|X| = -6$ παίρνουμε τον

ζητούμενο αντίστροφο πίνακα του X

$$X^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 4 \\ 24 & -15 & 12 \\ -12 & 6 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/3 & 5/6 & -2/3 \\ -4 & 5/2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

D) υπολογίζουμε την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -3 \\ 5 & 2 & x \end{vmatrix} = \text{ανέπτυξε 1^{ος} γραμμή} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} x & -3 \\ 2 & x \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 5 & x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 (x^2 + 6) - 0 (0 + 15) + 1 (0 - 5x) =$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

και έχουμε : $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} + \rightarrow \frac{6}{2} = 3 \\ - \rightarrow \frac{4}{2} = 2 \end{matrix}$$

Τελικά για $x = 3$ ή $x = 2$ η ορίζουσα Δ είναι μηδέν

Άσκηση 2. λύση: Α) i/ 0 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή αφού το στοιχείο $a_{21} = 14 \neq 0$

0 πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

Δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή αφού τα στοιχεία

αφού τα στοιχεία $a_{21} = 4 \neq 0$, $a_{31} = -2 \neq 0$ και $a_{32} = 8 \neq 0$

0 πίνακας $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/120 \end{pmatrix}$ είναι σε κλιμακωτή

μορφή αφού $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$ και $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$

Προχωράμε στην απεχρίστη κλιμακωτή μορφή (Α.Κ.Μ) των

πίνακων A, B, C με τη βοήθεια γραμμοπράξεων

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 - 2\gamma_1} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1/7 \gamma_1 \\ 1/4 \gamma_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & -5/7 \\ 0 & 1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 - 2/7 \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

κλιμακωτή μορφή

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/4 \\ 0 & 1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ανηγμένη υψιμεκωτή μορφή του } A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 + 2\gamma_1]{\gamma_2 - 4\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/12 \gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 + 8\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/6 \gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 - 2\gamma_2} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 + \gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Α.Κ.Μ του } B$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/120 \end{pmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \cdot 120/7]{1/12 \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 - 2\gamma_2} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 + \gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Α.Κ.Μ του } C$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

β) Παρατηρούμε ότι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 (16 - 1) + 3 (5 - 0) = 15 + 15 = 30 \neq 0$$

οπότε το Διανύσμα γραμμών του πίνακα A είναι

γραμμικά ανεξάρτητα

Προχωράμε στην υλιμενωτή μορφή του πίνακα A

Έχουμε διαδικασίες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 - 5\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/2 \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 - \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = B$$

Ο πίνακας B υλιμενωτή μορφή του A έχει οδηγούς

στην 1^η, 2^η και 3^η στήλη (Δύοτερες διαδικασίες αβλ 112 βιβλίο Ε.Α.Π)

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Ουνεπως τὰ διενόητες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Ο βαθμός του πίνακα A είναι τρία $\text{rank}(A)=3$ όσο και

το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του B

C) i/ Αρχικώς θὰ βρούμε την αριθμητική μορφή του πίνακα S

με τὴ βοήθεια γραμμοπερίφρων. Έχουμε παραδοχικὰ

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\gamma_3 + \gamma_1 \\ \gamma_4 - \gamma_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\gamma_3 + 2\gamma_2 \\ \gamma_4 - \gamma_2}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \leftrightarrow \gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 13 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_4 + 5\gamma_3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)\gamma_2 \\ (-1)\gamma_3 \\ -1/2\gamma_4}} \begin{pmatrix} (1) & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & (1) & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & (1) & 7 \end{pmatrix} = E$$

Ο τελευταίος πίνακας E είναι η αριθμητική μορφή του S

Επειδή η $1^2, 2^2, 3^2$ στήλη του πίνακα E έχουν μη μηδενικά

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

οδηγεί στοιχεία η $1^2, 2^2$ και 3^2 στηλη του αρχικού πίνακα S

δηλ. τα $\{s_1, s_2, s_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii/ Ομοίως η $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ στηλη του πίνακα E έχουν μη

μηδενικά στοιχεία οδηγούς, η $1^2, 2^2, 3^2$ και 4^2 στηλη του αρχικού

πίνακα S δηλαδή τα s_1, s_2, s_3, s_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα

διευνεύεται

iii/ Επειδή $\dim R^4 = 4$ το σύνολο $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$,

πληθός πέντε, είναι γραμμικά εξαρτημένο

(*) Τα διευνεύεται s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 ανήκουν στον R^4 χώρο

Άσκηση 3. Λύση: Α/ i) Σύμφωνα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss

θεωρούμε τον επεκτενημένο πίνακα του συστήματος

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

θα βρούμε την ^{ακέραια} γ χ μ ν ϵ κ ω τ ι μορφή του πίνακα (A/B)

Έχουμε διαισθητικά

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_3 - \gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_3 + 2\gamma_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{1/5 \gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_1 - 3\gamma_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \gamma_1 + 8\gamma_3 \\ \gamma_2 - 2\gamma_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ Α.Κ.Μ του (A/B)}$$

Ο τελευταίος πίνακας δίνει $(x_1, x_2, x_3) = (5, -1, 1)$ που

σημαίνει ότι το γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

ii/ Γεωμετρική ερμηνεία : Είναι γνωστό ότι το σύνολο των σημείων $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν μία εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ είναι ένα επίπεδο. Επομένως η μοναδική λύση $(5, -1, 1)$ του γραμμικού συστήματος είναι το σημείο τομής τριών επιπέδων.

B/ Βαθμός πίνακα και γραμμικό σύστημα

Θεωρώ τον επεκτεταμένο πίνακα του συστήματος

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 2 & 3 & -1 & | & 6 \\ 5 & 5 & -1 & | & 15+a \end{pmatrix}}_E$$

A: πίνακες των συντελεστών των αγνώστων

E: επεκτεταμένος πίνακας

Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς θα

βρούμε την αλγεκωτική μορφή του παραπάνω πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 2 & 3 & -1 & | & 6 \\ 5 & 5 & -1 & | & 15+a \end{pmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 - 5\gamma_1]{\gamma_2 - 2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 5 & -3 & | & -2 \\ 0 & 10 & -6 & | & -5+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 - 2\gamma_2}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right) \quad (*)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Αν $a \neq 1$ τότε $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(E) = 3$ και το

σύστημα είναι αδύνατο (δεν έχει λύση)

Αν $a = 1$ τότε $\text{rang}(A) = \text{rang}(E) = 2$ και το σύστημα

έχει λύση

Επιπλέον επειδή $\text{rang}(A) = \text{rang}(E) = 2 < n = 3$

(n : αριθμός αγνώστων) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

(συμπεριμένα $n - \text{rang}(A) = 3 - 2 = 1$ ελεύθερος αγνώστους)

Προχωράμε στον προσδιορισμό της μορφής των λύσεων

Για $a = 1$ βρίσκουμε την Α.Κ.Μ

$$(*) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1/5 \gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\gamma_1 + \gamma_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/5 & 18/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Α.Κ.Μ}$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + \frac{2}{5}x_3 = \frac{18}{5} \\ x_2 - \frac{3}{5}x_3 = -\frac{2}{5} \\ 0x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{απ' όπου} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Τελικά για $\alpha=2$ οι άπειρες λύσεις του συστήματος

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{18}{5} - \frac{2}{5}x_3, -\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x_3, x_3 \right) \quad \text{ή} \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 4. Λύση Α) i/ Για το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$$

έχουμε. Το μηδενικό διάνυσμα $(0, 0)$ ανήκει στο υποσύνολο

A αφού $0 \geq 0$ που σημαίνει ότι το σύνολο A είναι

διάνυσμα του κενού συνόλου ($A \neq \emptyset$). Εστω τώρα

$\vec{u} = (x_1, y_1)$ με $x_1 \geq 0$ και $\vec{v} = (x_2, y_2)$ με $x_2 \geq 0$ δύο

διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ που ανήκουν στο A και λ πραγματικός

αριθμός. Έχουμε διαδοχικά:

$$1. \quad \vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Επειδή $x_1 + x_2 \geq 0$ (αφού $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) έπεται ότι

το $\vec{u} + \vec{v}$ ανήκει στο A

$$2. \quad \lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Οφώς $\lambda x_1 \geq 0$ όχι πάντα γι' οποιοδήποτε λ αν $\lambda < 0$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

και $x_1 > 0$ παίρνουμε $\lambda x_1 = -x_1 < 0$ οπότε το διάνυσμα

$\lambda \vec{u}$ δεν ανήκει στο A

Συνεπώς το A δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

ii/ Για το υποσύνολο $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 5y = 2 \}$

παρατηρούμε ότι το μηδενικό διάνυσμα $(0, 0)$ του χώρου $\mathbb{R}^2$

δεν ανήκει στο B

Πράγματι $3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2$. Συνεπώς άρα

το B δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

iii/ Εφαρμόζουμε τον ορισμό Έστω $\vec{\gamma}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{\gamma}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε διδαχικά

$$\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2 \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0 \\ 3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$1. \quad \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \text{οπότε παίρνουμε}$$

$$3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (3x_1 + 2y_1 - z_1) + (3x_2 + 2y_2 - z_2) =$$

$$= 0 + 0 = 0 \quad \text{συνεπώς} \quad \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 \in \Gamma$$

2. $\lambda \vec{\gamma}_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ και παίρνουμε

$$3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 - \lambda z_1 = \lambda (3x_1 + 2y_1 - z_1) \stackrel{(*)}{=} \lambda \cdot 0 = 0 \quad \text{για κάθε } \lambda$$

συνεπώς $\lambda \vec{\gamma}_1 \in \Gamma$

Επομένως το Γ υποχώρος του $\mathbb{R}^3$

B) i/ βάση-διάνυσμα του V . Έχουμε διόδοχια

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + z = 0 \} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x - 2y \} =$$

$$= \{ (x, y, -2x - 2y) : x, y \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, 0, -2) + y(0, 1, -2) : x, y \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \text{span} \left((1, 0, -2), (0, 1, -2) \right)$$

Πηλ. ο V περιγράφεται από τα διανύσματα $(1, 0, -2)$, $(0, 1, -2)$. Το σύνολο των διανυσμάτων

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$\{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς

η διανυσματική εξίσωση $\mu(1, 0, -2) + \lambda(0, 1, -2) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow (\mu, \lambda, -2\mu - 2\lambda) = (0, 0, 0) \Rightarrow \mu = 0 \text{ και } \lambda = 0 \text{ έχει}$$

τη μηδενική λύση. Άρα μια βάση του V είναι

το σύνολο $\{(1, 0, -2), (0, 1, -2)\}$ και $\dim V = 2$

Ομοίως για το W έχουμε

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x - 2y\} =$$

$$= \{(x, y, -x - 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \text{span}((1, 0, -1), (0, 1, -2))$$

Τις διανυσματικές $(1, 0, -1), (0, 1, -2)$ περιέχουν τον W

και καθώς η διανυσματική εξίσωση

$$\mu(1, 0, -1) + \lambda(0, 1, -2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$(κ, λ, -κ-2λ) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow κ=0 \text{ και } λ=0 \text{ έχει φανερά την}$$

την μηδενική λύση. Τη διευθετούμε $(1, 0, -1), (0, 1, -2)$ είναι

γραμμικά ανεξάρτητα και το σύνολο $\{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$

αποτελεί βάση του W . Προφανώς $\dim W = 2$

ii/ Αρχικά η τομή των χώρων V, W περιγράφεται ως

$$\text{έτσι: } V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y+z=0, x+2y+z=0\}$$

Έχουμε ότι συνήθως τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2y \\ x=0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

οπότε παίρνουμε

$$V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y+z=0, x+2y+z=0\} =$$

$$= \{(0, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1, -2) : y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \text{span}((0, 1, -2))$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Το μη μηδενικό διάνυσμα $(0, 1, -2)$ αποτελεί μία βάση

της κομής $V \cap W$ συνεπώς $\dim(V \cap W) = 1$

iii/ Ισχύει το εξής αποτέλεσμα

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

Στη δική μας περίπτωση με $\dim V = \dim W = 2$

και $\dim(V \cap W) = 1$ παίρνουμε

$$\dim(V+W) = 2 + 2 - 1 = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\dim(V+W) = 3$$

τη συντοφύβη διάσταση του υπόχωρου $V+W$

(άθροισμα των χώρων V και W)

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Άσκηση 5. Λύση: Α. Σύμφωνα με την ορισμό. Έστω

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ 2\gamma_1 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \in V \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ 2\gamma_2 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \in V$$

i/ τότε το άθροισμα

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ 2\gamma_1 & -\gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & z_2 \\ 2\gamma_2 & -\gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{x_1+x_2}^{\alpha} & \overbrace{z_1+z_2}^{\beta} \\ \underbrace{2(\gamma_1+\gamma_2)}_{\gamma} & \underbrace{-(\gamma_1+\gamma_2)}_{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\gamma & -\gamma \end{pmatrix}$$

(έχει την μορφή των στοιχείων του V) ανήκει στον V

ii/ και ο βαθμωτός πολ/γός

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ 2\gamma_1 & -\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda x_1}^{\kappa} & \overbrace{\lambda z_1}^{\mu} \\ \underbrace{2\lambda\gamma_1}_{\pi} & \underbrace{-\lambda\gamma_1}_{-\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \mu \\ 2\pi & -\pi \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{η μορφή των} \\ \text{στοιχείων του} \\ V \end{array}$$

ανήκει στον V

Ευνεπώς το V είναι υπόχωρος του χώρου των

πραγματικών πινάκων 2×2 με πραγματικά στοιχεία
 $(M_{22}(\mathbb{R}))$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Επειδή

$$\begin{pmatrix} x & z \\ 2y & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2y & -y \end{pmatrix} \\ = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

παρατηρούμε

$$V = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{B}_V = \mathcal{B}_V'$$

ο V παράγεται από τους παραπάνω πίνακες

Και θωρείς την διανυσματική εξίσωση, με $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ 2\mu & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa = \lambda = \mu = 0$$

έχει μοναδική λύση την μηδενική

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ είναι γραμμικά

ανεξάρτητο και αποτελεί μία βάση του V επομένως

$$\dim V = 3$$

Β. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των χώρων

U και W δίνεται από την γραμμική θήκη

$$U+W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(σύνολο των γεννητόρων των U, W)

Επομένως το άθροισμα των U και W περιέχεται

από το άθροισμα των γεννητόρων των U και

W χώρων

Εστω τώρα $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ με

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

$$\kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa + \nu & \mu + 2\nu \\ -\kappa - \lambda + \mu & \lambda + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ -\kappa - \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -\nu \\ \mu = -2\nu \\ -\kappa - \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = -\nu \end{cases} \Leftrightarrow \nu + \nu - 2\nu = 0 \Leftrightarrow 0\nu = 0 \Rightarrow \nu \in \mathbb{R}$$

Τηλ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και οι πίνακες είναι γραμμικά εξαρτημένοι

(Σύμφωνα με τον ορισμό προφανώς αποτύχει να προσδιοριστούν τις βάσεις του αθροίσματος $U+W$)

Προχωρήσει στον προσδιορισμό μιας βάσης σύμφωνα με τη

δύτηρη διαδικασία της σελ 112 βιβλίου Γ.Α.Π

Θεωρώ την κενονική βάση του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

πινάκες δηλ τ' σύνολο των πινάκων

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτέλες για την του αθροίσματος $V+W$, συνεπώς

$$\dim(V+W) = 3$$

