

Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 5

Ημερομηνία ανάρτησης:	Τρίτη	12 Μαρτίου 2019
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής:	Τετάρτη	10 Απριλίου 2019
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Παρασκευή	12 Απριλίου 2019

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 5^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 9 (το ολοκλήρωμα)

Ενότητα 10 (γενικευμένη ολοκλήρωση)

Ενότητα 11 (εφαρμογές των ολοκληρωμάτων)

Ενότητα 12 (σειρές Fourier)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο study.eap.gr):

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός

- ολοκληρώματα 1,
- ολοκληρώματα 2,
- σειρές Fourier.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και κατανόηση των παρακάτω εννοιών:

- Ολοκληρώματα: ορισμένο ολοκλήρωμα, γενικές ιδιότητες, αόριστο ολοκλήρωμα, βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης, Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.
- Γενικευμένα ολοκληρώματα: είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων, κριτήρια σύγκλισης.
- Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων: εμβαδά χωρίων, όγκοι στερεών, μήκη επίπεδων καμπυλών, επιφάνειες και στερεά εκ περιστροφής.
- Σειρές Fourier: περιοδικότητα, υπολογισμός συντελεστών Fourier, σύγκλιση σειρών Fourier.

Άσκηση 1 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α) (μον. 4)
$$\int (x^3 + 5)^{200} x^2 dx$$

β) (μον. 4)
$$\int \frac{e^x}{(1+e^x) \ln(1+e^x)} dx$$

γ) (μον. 4)
$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

δ) (μον. 4)
$$\int x^2 \arctan(x) dx$$

ε) (μον. 4)
$$\int \frac{8x^2 - 16x + 12}{x^2(x-2)} dx$$

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 7) Να υπολογιστεί το εμβαδό του κλειστού φραγμένου χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τύπους $f_1(x) = x^2 - 2$ και $f_2(x) = 7$.

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τα σημεία τομής και τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f_1 και f_2 .

β) (μον. 7) Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης που δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 2)^3}$ στο διάστημα $[2, 4]$.

γ) (μον. 6) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή γύρω από των άξονα των x της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{\cos^7(x) \sin(x)}$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 5) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^5} dx$.

β) (μον. 5) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{6+}^{22} \frac{1}{\sqrt[4]{x-6}} dx$.

γ) (μον. 10) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

(i)
$$\int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x^8+1}} dx$$

(ii)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 8) Να εξηγηθεί γιατί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{t^2} dt$ αποκλίνει και να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt, \text{ αν υπάρχει.}$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\cos(x^3) - 1}{x}$ στο διάστημα $[1, 2]$.

(i) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της συνάρτησης συνημιτόνου, να εκφραστεί η f ως δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο $x_0 = 0$.

(ii) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας τη δυναμοσειρά που βρέθηκε στο προηγούμενο υποερώτημα και θεωρώντας δεδομένο ότι επιτρέπεται να ολοκληρώσουμε την δυναμοσειρά όρο-προς-όρο, να αποδειχθεί ότι

$$\int_1^2 \frac{\cos(x^3) - 1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{64^n - 1}{(2n)!(6n)}.$$

Άσκηση 5 (Μον. 20) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } -\pi < x \leq 0 \\ 6, & \text{αν } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x + 2\pi) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) (μον. 2) Να υπολογιστεί το $f(-\pi)$.

β) (μον. 12) Να υπολογιστεί η σειρά Fourier της f .

γ) (μον. 6) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της f , να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$