

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφα της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για την 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)	
--	--

Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	12/04/2017 23:59μμ
Ακ. Έτος	2016-17	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	5	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	OXI

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή
Φοιτητή

Υπογραφή
Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η

Ημερομηνία Ανάρτησης:	Τετάρτη	15 Μαρτίου 2017
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας:	Κυριακή	9 Απριλίου 2017
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	12 Απριλίου 2017 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Δευτέρα	17 Απριλίου 2017

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Ενότητα 9 (Το ολοκλήρωμα)

Ενότητα 10 (Γενικευμένη Ολοκλήρωση)

Ενότητα 11 (Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων)

Ενότητα 12: 12.1 – 12.4 (Σειρές Fourier)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής και για την εκπόνηση της εργασίας θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο [ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ](#) στο study.eap.gr ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός

Ολοκληρώματα 1,

Ολοκληρώματα 2,

Σειρές Fourier,

όπως και παλαιότερες γραπτές εργασίες και σημειώσεις των ομαδικών συμβουλευτικών συναντήσεων.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση

- Η κατανόηση των εννοιών του αόριστου, του ορισμένου και του γενικευμένου ολοκληρώματος.
- Η εκμάθηση των ιδιοτήτων των ανωτέρω εννοιών, των βασικών τεχνικών ολοκλήρωσης και η εφαρμογή τους στα προαναφερθέντα είδη ολοκληρωμάτων.
- Η κατανόηση των εφαρμογών των ολοκληρωμάτων.
- Η κατανόηση του υπολογισμού και της σημασίας των σειρών Fourier.

**Διαβάζετε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα με προαιρετική χρήση των υποδείξεων:

(i) $I_1 = \int \frac{8x+1}{4x+1} dx$ (διαίρεση)

(ii) $I_2 = \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx$ (με αντικατάσταση $u = \cos(x)$)

(iii) $I_3 = \int \frac{x^3}{\sqrt{3x-1}} dx$ (με αντικατάσταση $u = \sqrt{3x-1}$)

(iv) $I_4 = \int \frac{2x^2 + x + 2}{x(x-1)^2} dx$ (με διάσπαση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x + \rho_1)(x + \rho_2)^2} = \frac{A}{x + \rho_1} + \frac{B}{x + \rho_2} + \frac{C}{(x + \rho_2)^2})$$

(v) $I_5 = \int x^3 \tan^{-1}(x) dx$ (με παραγοντική ολοκλήρωση)

Υπενθύμιση: $\tan^{-1}$ συμβολίζει το τόξο εφαπτομένης, δηλαδή την αντίστροφη της συνάρτησης $y = \tan(x)$ όταν αυτή περιορίζεται στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

< Χώρος για τη λύση της 1ης άσκησης >

Άσκηση 2 (Μον. 20)

A) (μον. 6) Έστω $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρεθεί μία συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x) \cdot \sin^2(x)}$

γνωρίζοντας ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

Στη συνέχεια για τη συνάρτηση f που προσδιορίστηκε παραπάνω, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x) dx.$$

B) (μον. 6) Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^3 \frac{|x|}{|x-1|+1} dx$.

Γ) (μον. 8)

(i) Να εκφράσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ σε σειρά MacLaurin και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ως άθροισμα απείρων όρων δυναμοσειράς. Να επαληθεύσετε ότι η δυναμοσειρά είναι συγκλίνουσα.

(ii) Να προσεγγίσετε την τιμή του ολοκληρώματος με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση όρο-προς-όρο της σειράς MacLaurin.

< Χώρος για τη λύση της 2ης άσκησης >

Άσκηση 3 (Μον. 20)

A) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να υπολογιστούν, στην περίπτωση που συγκλίνουν, τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

(i) (μον. 5) $I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

(ii) (μον. 5) $I_2 = \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

B) (μον. 10) Να αποδείξετε, με παραγοντική ολοκλήρωση ότι, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπενθυμίζεται ότι ισχύει: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

< Χώρος για τη λύση της 3ης άσκησης >

Άσκηση 4 (Μον. 20)

A) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

- (i) (μον. 6) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου πάνω από τον άξονα xx' και κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για τις τιμές του x στο διάστημα $[4, 6]$.
- (ii) (μον. 4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , του άξονα xx' και των ευθειών $x = -2$ και $x = 0$.

Υπόδειξη: Να υπολογίσετε πρώτα τη μονοτονία της συνάρτησης και τις ασύμπτωτές της κάνοντας ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμά της.

B) (μον. 10) Να υπολογίσετε τον όγκο $V(a, b)$ ενός βαρελιού που σχηματίζεται περιστρέφοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ γύρω από τον άξονα xx' , από $x = a > 0$ μέχρι $x = b > a$. Να υπολογίσετε το όριο του $V(a, b)$ καθώς $a \rightarrow 0^+$.

< Χώρος για τη λύση της 4ης άσκησης >

Άσκηση 5 (Μον. 20)

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi]$, την οποία επεκτείνουμε σε όλο το $\mathbb{R}$ περιοδικά με περίοδο 2π . Συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα f και την περιοδική επέκτασή της.

- (i) (μον. 8) Να υπολογίσετε τη σειρά Fourier $F(x)$ της f .
- (ii) Να υπολογίσετε τη σειρά Fourier $\Phi(x)$ της f' με δύο τρόπους:
 - (a) (μον. 3) αναπτύσσοντας σε σειρά Fourier την f' .
 - (b) (μον. 3) παραγωγίζοντας κάθε έναν όρο του αναπτύγματος Fourier της f . Τι παρατηρείτε;
- (iii) (μον. 3) Για ποιές τιμές του x η σειρά Fourier $\Phi(x)$ συγκλίνει και ποιό είναι το άθροισμά της;
- (iv) (μον.3) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier $\Phi(x)$ στο (iii) και για κατάλληλη τιμή του x , να

υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Υπενθύμιση: Μια συνεχής συνάρτηση $f : (-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, που επεκτείνεται $2L$ -περιοδικά μπορεί να αναπαρασταθεί από την τριγωνομετρική σειρά (σειρά Fourier της f)

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right),$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx, \quad n=1, 2, \dots$$

< Χώρος για τη λύση της 5ης άσκησης >