

Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12) ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Ημερομηνία ανάρτησης: Δευτέρα 11 Φεβρουαρίου 2019
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής: Τετάρτη 13 Μαρτίου 2019
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: Παρασκευή 15 Μαρτίου 2019

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 4^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

- **Ενότητα 2** (ακολουθίες - όρια)
- **Ενότητα 3** (σειρές)
- **Ενότητα 8** (ανάπτυγμα Taylor)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο study.eap.gr):

- **Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός**

- Ακολουθίες
- Σειρές
- Σειρές Taylor.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και κατανόηση των εξής εννοιών:

- Ακολουθίες: φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες, απειριζόμενες, κριτήρια σύγκλισης, εύρεση ορίων, ιδιότητες ορίων, ασυμπτωτική συμπεριφορά.
- Σειρές: γενικός όρος, μερικά αθροίσματα, ειδικού τύπου σειρές, κριτήρια σύγκλισης, σχετική και απόλυτη σύγκλιση, εκτίμηση σφάλματος από μερικά αθροίσματα, κριτήρια σύγκρισης σειρών.
- Πολυωνυμική προσέγγιση, αναπτύγματα Taylor, μέθοδοι εύρεσης σειρών Taylor και Maclaurin, σειρές Taylor βασικών συναρτήσεων, δυναμοσειρές, διάστημα σύγκλισης.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 9) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \frac{3n+1}{2n+2}$ είναι μονότονη και φραγμένη. Να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

β) (μον. 6) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $b_n = \frac{(-1)^n n}{2n+1}$ είναι φραγμένη αλλά αποκλίνουσα.

γ) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $c_n = \frac{(-2)^n}{n!}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 2 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

α) (μον. 4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\pi \sqrt{n^4 + 7}}{6n^2 + 5} \right)$$

β) (μον. 4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{e} - 1) \sin(n)$$

γ) (μον. 4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^3)}{\ln(n)}$$

δ) (μον. 4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^{n-3}}{n^n}$$

ε) (μον. 4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$$

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 14) Να δοθεί τύπος για την ακολουθία $(a_n)_{n \geq 1}$ που ορίζεται από την αναδρομική σχέση $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ και $a_{n+2} = 7a_{n+1} + 8a_n$, για κάθε $n \geq 1$.

(Υπόδειξη: Για $n \geq 1$, θεωρούμε τον 2×1 πίνακα $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$. Να αποδειχθεί ότι $v_n = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} v_1$, να υπολογιστεί ο πίνακας $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$ και να βρεθεί ο ζητούμενος τύπος για το a_n).

β) (μον. 6) Έστω $(b_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει και ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}} x^n$ συγκλίνει απόλυτα όταν $x \in (-1, 1)$.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 2) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{8^n}$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της.

β) (μον. 3) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της.

γ) (μον. 15) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

(ii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$

(iv) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 3}{10n}\right)^n (x+4)^n$.

β) (μον. 8) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής μεταβλητής x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+5)4^n}.$$

γ) (μον. 8) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3\sin x - \cos(2x)$. Να υπολογιστεί το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο Maclaurin της f . Κάνοντας εκτίμηση του σφάλματος που προκύπτει από την προσέγγιση της f από το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο Maclaurin της, να βρεθούν πραγματικές σταθερές a, b, c, d τέτοιες ώστε $|f(x) - a - bx - cx^2| \leq d|x|^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.