Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Ημερομηνία ανάρτησης:	**Σάββατο**	**21 Δεκεμβρίου 2019**
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής:	**Τετάρτη**	**4 Μαρτίου 2020**
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	**Παρασκευή**	**6 Μαρτίου 2020**

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της **3ης** εργασίας αναφέρονται στα:
- **Ενότητα 2** (Συναρτήσεις - Ακολουθίες - Όρια)
- **Ενότητα 3** (Σειρές **(εν μέρει)**)
- **Ενότητα 4** (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)
- **Ενότητα 5** (Παράγωγος)
- **Ενότητα 6** (Βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
- **Ενότητα 7** (Ακρότατα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο study.eap.gr):
Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός
- Σύνολα Αριθμών
- Συναρτήσεις
- Όρια-Συνέχεια
- Παράγωγοι
- Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού.
- Ακολουθίες
- Σειρές **(εν μέρει)**

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να βοηθήσει στη μελέτη και κατανόηση των εξής εννοιών:
- πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής,
- όριο και συνέχεια συναρτήσεων και σχετικές ιδιότητες,
- παράγωγος πρώτης τάξης και ανώτερων τάξεων, κανόνες παραγώγισης,
- βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού,
- εφαρμογές αυτών στον υπολογισμό ορίων, στην εύρεση ακρότατων τιμών, στη μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης και στη μελέτη εξισώσεων και ανισώσεων.
- ακολουθίες: φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες, απειριζόμενες, κριτήρια σύγκλισης, εύρεση ορίων, ιδιότητες ορίων, ασυμπτωτική συμπεριφορά.
- σειρές: γενικός όρος, μερικά αθροίσματα, ορισμός απόλυτης και σχετικής σύγκλισης, σειρές ειδικού τύπου: γεωμετρικές, τηλεσκοπικές, $p-$σειρές, κριτήριο Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές.

Περισσότερα κριτήρια σύγκλισης σειρών (π.χ. κριτήριο λόγου, κριτήριο ρίζας, ανισοτικά και οριακά κριτήρια σύγκρισης σειρών) θα μελετηθούν στην επόμενη εργασία.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=ax^2+bx+c$, όπου a, b, c πραγματικές σταθερές. Δίνεται ότι $f(1)=12$, $f(-1)=2$, $f'(3)=23$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=f(x)$ στο σημείο $(2,\ f(2))$.

β) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 4-3x, & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Είναι η g παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$;

γ) (μον. 3) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{x-2}{3-x}$. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος τάξης n της h δίνεται από τον τύπο $h^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(3-x)^{n+1}}$, για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε $x\neq 3$.

δ) (μον. 8) Δίνεται η συνάρτηση $p:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $p(x)=e^x+\ln x$. Να αποδειχθεί ότι η p είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση. Να εξηγηθεί γιατί η p^{-1} είναι παντού παραγωγίσιμη. Να υπολογιστεί η παράγωγος της p^{-1} στο σημείο $a=e$.

Άσκηση 2 (Μον. 20) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$.

α) (μον. 5) Να υπολογιστεί η παράγωγος της f, να προσδιοριστούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά ακρότατα της f.

β) (μον. 4) Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της f και να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

γ) (μον. 5) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ασύμπτωτες (οριζόντιες, κατακόρυφες ή πλάγιες) της γραφικής παράστασης της f.

δ) (μον. 6) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο διάστημα $\left[-\dfrac{1}{8},\ 8\right]$.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 5) Θεωρούμε το σημείο $P=(27,0)$ του επιπέδου. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $y=\sqrt{6x}$ το οποίο είναι κοντινότερο στο P.

β) (μον. 4) Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{x}{1+x^2}\le \arctan(x)\le x$, για κάθε $x\ge 0$.

γ) (μον. 5) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f(0)=2$ και $(e^x+1)\,f'(x)=e^x\,f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=e^x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) (μον. 6) Έστω a πραγματική σταθερά. Να βρεθεί το πλήθος των $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία $x^4+4x+a=0$. (<u>Υπόδειξη:</u> Η απάντηση εξαρτάται από το a).

Άσκηση 4 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

α) (μον. 3) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+x+1}{\sqrt{4x^{10}+5x^3+2}}$$

β) (μον. 3) $$\lim_{x\to 4}\frac{e^{\sqrt{x}}-e^2}{|x-4|}$$

γ) (μον. 3) $$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

δ) (μον. 3) $$\lim_{x\to 0}x^2\,3^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

ε) (μον. 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\dfrac{1+3n+n^2\pi}{5+4n^2}\right)$

στ) (μον. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{4n+1}\right)^{8n+2}$

ζ) (μον. 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}\,n^2}{6^n\,(n+1)}$

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = e^n - n$ είναι γνησίως αύξουσα και αποκλίνουσα.

β) (μον. 4) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $b_n = \dfrac{(-3)^n + 4}{5+3^n}$ είναι φραγμένη και αποκλίνουσα.

γ) (μον. 3) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^{3n}}{9^{n-1}}$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της.

δ) (μον. 4) Να εξεταστεί αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \dfrac{7}{\sqrt{n^3}}\right)$ συγκλίνει.

ε) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ συγκλίνει αλλά όχι απόλυτα.