

Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12) ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Ημερομηνία ανάρτησης: Παρασκευή 28 Δεκεμβρίου 2018
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής: Τετάρτη 13 Φεβρουαρίου 2019
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: Παρασκευή 15 Φεβρουαρίου 2019

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

- **Ενότητα 2.1** (πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής)
- **Ενότητα 4** (όριο και συνέχεια συνάρτησης)
- **Ενότητα 5** (παράγωγος)
- **Ενότητα 6** (βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
- **Ενότητα 7** (ακρότατα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο study.eap.gr):

- **Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός**
 - Σύνολα Αριθμών
 - Συναρτήσεις
 - Όρια-Συνέχεια
 - Παράγωγοι
 - Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να βοηθήσει στη μελέτη και κατανόηση:

- της έννοιας της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής,
- των εννοιών του ορίου και συνέχειας συναρτήσεων και των σχετικών ιδιοτήτων
- της παραγώγου (πρώτης τάξης και ανώτερων τάξεων) και των κανόνων παραγωγίσης,
- των βασικών θεωρημάτων του διαφορικού λογισμού και
- των εφαρμογών αυτών στον υπολογισμό ορίων, στην εύρεση ακρότατων τιμών, στη μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης και στη μελέτη εξισώσεων και ανισώσεων.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(1)=3$, $f'(1)=5$, $f'(4)=-3$, $g(1)=4$, $g'(1)=-2$. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\frac{f}{g}$, f^2g και $f \circ g$ στο σημείο $x_0=1$.

β) (μον. 8) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής σταθεράς c για τις οποίες η συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \begin{cases} 16-11x, & \text{αν } x \leq 2 \\ cx^3 + c^2x, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Υπάρχει τιμή του c για την οποία η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$;

γ) (μον. 6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $G: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $G(x) = \frac{x+4}{x^2+3x+2}$. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος τάξης n της G δίνεται από τον τύπο $G^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{3}{(x+1)^{n+1}} - \frac{2}{(x+2)^{n+1}} \right)$, για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε $x \neq -1, -2$.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x^4 + 23 + \cos(x-1)}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(1, 5)$ και να υπολογιστεί προσεγγιστικά το $f(1.005)$.

β) (μον. 7) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ στο διάστημα $[-4, 4]$.

γ) (μον. 7) Θεωρούμε το σημείο $P = (9, 0)$ του επιπέδου. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $y = 2x^2$ που είναι κοντινότερο στο P .

Άσκηση 3 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

α) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{|x - 2|}$$

β) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

γ) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$$

δ) (μον. 3)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{(x+4)^x}$$

ε) (μον. 4)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x) \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}}$$

στ) (μον. 4)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \cos x + 5}{7x^2 + \sin x}$$

Άσκηση 4 (Μον. 20) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

α) (μον. 5) Να υπολογιστεί η παράγωγος της f , να προσδιοριστούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά ακρότατα της f .

β) (μον. 5) Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της f , να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .

γ) (μον. 5) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ασύμπτωτες (οριζόντιες, κατακόρυφες ή πλάγιες) της γραφικής παράστασης της f .

δ) (μον. 5) Έστω g ο περιορισμός της f στο διάστημα $[3, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί τύπος για την g^{-1} .

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 5) Έστω $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $F(0) = 5$ και $F'(x) \leq 3$, για κάθε $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι $F(x) \leq 3x + 5$, για κάθε $x \geq 0$.

β) (μον. 5) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $2x = \cos x$.

γ) (μον. 5) Έστω $a \in (1, +\infty)$ και $M \in [0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι κάθε συνάρτηση $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|G(x) - G(y)| \leq M|x - y|^a$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να αποδειχθεί ότι η G είναι παραγωγίσιμη με μηδενική παράγωγο).

δ) (μον. 5) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Υπόδειξη: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (f(x) - \sin x)^2 + (f'(x) - \cos x)^2$ έχει μηδενική παράγωγο).