

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για την 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)	
--	--

Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	08/02/2017 23:59μμ
Ακ. Έτος	2016-17	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	3	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	OXI

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από μένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή
Φοιτητή

Υπογραφή
Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

Ημερομηνία Ανάρτησης:	Τετάρτη	21 Δεκεμβρίου 2016
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας:	Κυριακή	5 Φεβρουαρίου 2017
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	8 Φεβρουαρίου 2017 ¹
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Δευτέρα	13 Φεβρουαρίου 2017

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Ενότητα 2 (2.1 πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής)

Ενότητα 4 (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)

Ενότητα 5 (Παράγωγος)

Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)

Ενότητα 7 (Ακρότατα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής και για την εκπόνηση της εργασίας θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο [ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ](http://study.eap.gr) στο study.eap.gr ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός

Σύνολα Αριθμών,

Συναρτήσεις,

Όρια-Συνέχεια,

Παράγωγοι,

Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού.

όπως και παλαιότερες γραπτές εργασίες και σημειώσεις των ομαδικών συμβουλευτικών συναντήσεων.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση

- της έννοιας της πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής,
- της έννοιας του ορίου και συνέχειας συναρτήσεων και των σχετικών ιδιοτήτων,
- της παραγωγού (πρώτης και ανώτερης τάξης),
- των κανόνων παραγωγίσης,
- των θεωρημάτων του διαφορικού λογισμού και
- των εφαρμογών αυτών στον υπολογισμό ορίων, στην εύρεση ακρότατων τιμών, στην μελέτη συνάρτησης και στην απόδειξη ανισοτικών σχέσεων μεταξύ συναρτήσεων.

**Διαβάζετε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

¹ Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

A) (μον.8) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) πραγματικοί αριθμοί a, β, γ ώστε η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \beta x + \gamma, & x > 0 \\ e^x, & x < 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$.

B) (μον.6) Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.

$$\textbf{i)} \quad f(x) = x^2 - 8 \ln x, \quad \textbf{ii)} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Γ) (μον. 6) Αφού υπολογίσετε τις παραγώγους 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} τάξης της συνάρτησης

$$h(x) = \sin(3x),$$

να χρησιμοποιήσετε μαθηματική επαγωγή και να δώσετε, συναρτήσει του φυσικού αριθμού n , τον γενικό τύπο για την παράγωγο τάξης n .

< Χώρος για τη λύση της 1ης άσκησης >

Άσκηση 2 (Μον. 20)

A) (μον. 10) Δώστε τον τύπο της γραμμικής προσέγγισης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ με τη βοήθεια της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της παραγωγίσιμης στο σημείο αυτό συνάρτησης f και στη συνέχεια κάνετε χρήση της προσέγγισης αυτής για να υπολογίσετε (προσεγγιστικά) τις τιμές της συνάρτησης στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $f(x) = x^{1/4}$, $x_0 = 16$, να υπολογιστούν προσεγγιστικά οι τιμές $\sqrt[4]{16.5}$, $\sqrt[4]{15.8}$,

ii) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = 1$, να υπολογιστούν προσεγγιστικά οι τιμές $f(1.2)$, $f(0.8)$,

iii) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 8$, να υπολογιστούν προσεγγιστικά οι τιμές $\sqrt{9.1}$, $\sqrt{8.8}$.

B) (μον. 10) Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή στο αντίστοιχο διάστημα.

i) (μον. 2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ στο διάστημα $[-3, 0]$.

ii) (μον. 4) $g(x) = e^{\sin x}$ στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$.

iii) (μον. 4) $h(x) = e^x - 2x$ στο διάστημα $[0, 1]$.

< Χώρος για τη λύση της 2ης άσκησης >

Άσκηση 3 (Μον. 20)

A) (μον. 5) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x$, $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα και να υπολογίσετε το $(f^{-1})'(1)$.

B) (μον. 5) Έστω $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση έτσι ώστε $g'(x) = -g(x)^2$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x . Δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \geq 0$ τέτοιος ώστε $g(x) = \frac{1}{a+x}$

για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x . (Υπόδειξη: Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{g(x)} - x$ είναι σταθερή

υπολογίζοντας την παράγωγό της).

Γ) i) (μον. 5) Αν $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι μια απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές πραγματικές λύσεις, να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις (Υπόδειξη: Αν $a < b < \gamma < \delta$ τέσσερις διαφορετικές ρίζες της $f(x) = 0$, χρησιμοποιήστε το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα τρία κλειστά διαστήματα που ορίζουν οι τέσσερις αυτές ρίζες για να συμπεράνετε ότι η παράγωγος f' έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες. Στη συνέχεια επαναλάβετε το ανάλογο σκεπτικό για την f'').

ii) (μον. 5) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας το **i)** δείξτε ότι έχει το πολύ τρεις διαφορετικές ρίζες. Στη συνέχεια θέσατε διαδοχικά $x = -2, x = -1, x = 1, x = 2$ και μελετώντας τα αντίστοιχα πρόσημα χρησιμοποιήστε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, σελ 94 στο βιβλίο του ΕΑΠ).

< Χώρος για τη λύση της 3ης άσκησης >

Άσκηση 4. (Μον.20)

A) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) (μον. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3+x}}{x},$ **ii)** (μον.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 5)}{\ln(x^3 + 9)}.$

B) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) (μον. 4) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x - \sin(\pi x)}{4x^2 - 1},$ **ii)** (μον. 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x}.$

Γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) (μον. 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{\cos x - 1} \right),$ **ii)** (μον. 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan^{-1}(2x)}{\tan^{-1}(3x)}.$

< Χώρος για τη λύση της 4ης άσκησης >

Άσκηση 5. (Μον. 20) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbf{R} - \{2\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$.

A) (μον. 4) Αφού υπολογιστεί η παράγωγος f' , να προσδιοριστεί η μονοτονία της f και να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα (αν υπάρχουν).

B) (μον.3) Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και να βρεθεί το πεδίο τιμών της f .

Γ) (μον. 4) Αφού υπολογιστεί η παράγωγος f'' , να προσδιοριστεί σε ποια διαστήματα η f είναι κοίλη ή κυρτή και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής.

Δ) (μον. 5) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ασύμπτωτες ευθείες (οριζόντιες, κατακόρυφες, πλάγιες) της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της f .

Ε) (μον. 4) Θεωρούμε τον περιορισμό g της συνάρτησης f στο διάστημα $[3, \infty)$, δηλαδή τη $g : [3, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)$. Βρείτε το σύνολο τιμών T της g και βρείτε, εφόσον υπάρχει, συνάρτηση $h : T \rightarrow [3, \infty)$ με $g(h(x)) = x$ για κάθε $x \in T$.

< Χώρος για τη λύση της 5ης άσκησης >