Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ I (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Ημερομηνία ανάρτησης: Τετάρτη 13 Νοεμβρίου 2019
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής: Τετάρτη 18 Δεκεμβρίου 2019
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: Παρασκευή 20 Δεκεμβρίου 2019

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της **2ης** εργασίας αναφέρονται στα:
- **Κεφάλαιο 3** (Χώροι εσωτερικού γινομένου)
- **Κεφάλαιο 4** (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)
- **Κεφάλαιο 5** (Χαρακτηριστικά μεγέθη και κανονικές μορφές γραμμικών απεικονίσεων)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Γραμμική Άλγεβρα**» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο study.eap.gr):
- **Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό:**
  Κεφάλαιο 6 (Διανυσματικοί Χώροι), **Κεφάλαιο 7** (Βάσεις και Διάσταση), **Κεφάλαιο 8** (Γραμμικές Απεικονίσεις), **Κεφάλαιο 9** (Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα), **Κεφάλαιο 10** (Διαγωνοποίηση), **Κεφάλαιο 11** (Τετραγωνικές Μορφές).
- **Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό** από Γραμμική Αλγεβρα:
  Διανυσματικοί χώροι, γραμμικές απεικονίσεις, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποίηση, τετραγωνικές μορφές.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να βοηθήσει στη μελέτη και κατανόηση:
- των εννοιών της ορθογωνιότητας διανυσμάτων, του ορθογωνίου συμπληρώματος υποχώρου και της προβολής διανύσματος σε υπόχωρο
- της μεθόδου Gram-Schmidt για τη εύρεση ορθοκανονικής βάσης υποχώρου
- της σύνδεσης ορθοκανονικών βάσεων και ορθογώνιων πινάκων
- της έννοιας της γραμμικής απεικόνισης μεταξύ διανυσματικών χώρων
- του πίνακα αναπαράστασης, του πυρήνα, της εικόνας, του βαθμού και της μηδενικότητας μιας γραμμικής απεικόνισης
- των εννοιών του μονομορφισμού, του επιμορφισμού και του ισομορφισμού
- των χαρακτηριστικών μεγεθών (ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων) γραμμικής απεικόνισης
- των κριτηρίων διαγωνοποίησης πινάκων
- της χρήσης της διαγωνοποίησης στον υπολογισμό δυνάμεων διαγωνοποιήσιμων πινάκων
- των χαρακτηριστικών μεγεθών πινάκων ειδικού τύπου (π.χ. συμμετρικών πινάκων)
- των τετραγωνικών μορφών και της σύνδεσής τους με τις κωνικές τομές.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 8) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{R})$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

β) (μον. 12) Θεωρούμε τον πίνακα $B=\begin{pmatrix}8 & 5\\ -6 & -5\end{pmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Έστω n θετικός ακέραιος. Να βρεθεί τύπος για τον B^n.

Άσκηση 2 (Μον. 20) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

α) (μον. 4) Να υπολογιστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

β) (μον. 6) Να βρεθούν βάσεις για τους ιδιόχωρους που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A.

γ) (μον. 2) Να εξεταστεί αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

δ) (μον. 4) Να αποδειχθεί ότι $A^{n+1}=3A^n$, για κάθε θετικό ακέραιο n.

ε) (μον. 4) Έστω W ο υπόχωρος του $M_{3,3}(\mathbb{R})$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $I, A, A^2, \ldots, A^{1500}$. Να βρεθεί βάση του W.

Άσκηση 3 (Μον. 20) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έστω V ο μηδενόχωρος του πίνακα $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 3 & 7 & 4 & 5\end{pmatrix}\in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

α) (μον. 6) Έστω $V^{\perp}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V. Να βρεθεί βάση του $V^{\perp}$.

β) (μον. 4) Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $V^{\perp}$.

γ) (μον. 6) Να δοθεί τύπος για την προβολή του διανύσματος $u=(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ στον υπόχωρο $V^{\perp}$.

δ) (μον. 4) Έστω $v\in V$ και $w\in V^{\perp}$ τέτοια ώστε $\|v\|=5$ και $\|w\|=12$. Να υπολογιστεί το $\|v+w\|$.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 11) Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ η απεικόνιση με τύπο $f(x,y,z)=(x+y-z,\ 2x-z,\ x-y,\ 5x+3y-4z)$.

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γραμμική.

ii) Να βρεθεί βάση του πυρήνα της f και βάση της εικόνας της f.

β) (μον. 6) Δίνεται γραμμική απεικόνιση $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{(1,1,0),\ (0,2,1),\ (3,1,0)\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix}$. Να εξεταστεί αν η g είναι επί και να υπολογιστεί η διάσταση του πυρήνα της g.

γ) (μον. 3) Να εξεταστεί αν η απεικόνιση $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $h(x,y) = (\max\{x,y\}, \min\{x,y\})$ είναι γραμμική.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 3) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος, αρνητικά ορισμένος ή αόριστος.

β) (μον. 9) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 49 & -36 \\ -36 & 28 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

i) Να βρεθεί διαγώνιος πίνακας $D \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ και ορθογώνιος πίνακας $P \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $B = P\,D\,P^T$.

ii) Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή με τύπο $Q(x_1, x_2) = 49x_1^2 - 72x_1x_2 + 28x_2^2$. Τι είδους κωνική τομή περιγράφει η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 2019$;

γ) (μον. 8) Δίνεται συμμετρικός πίνακας $C \in M_{5,5}(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $\det(C) = 28$, $\mathrm{tr}(C) = 10$ και $\mathrm{rank}(C-4I) = \mathrm{rank}(C-7I) = \mathrm{rank}(C-I) = 4$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $S \in M_{5,5}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $C = S \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^T$.