Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Ημερομηνία ανάρτησης:	**Πέμπτη**	**10**	**Οκτωβρίου 2019**
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	**Τετάρτη**	**13**	**Νοεμβρίου 2019**
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	**Παρασκευή**	**15**	**Νοεμβρίου 2019**

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της **1ης** εργασίας αναφέρονται στα:
- **Κεφάλαιο 1** (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα) και
- **Κεφάλαιο 2** (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάσταση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ “**Γραμμική Άλγεβρα**” των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο study.eap.gr):

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :
Σύνολα Αριθμών,
Συναρτήσεις,
Πίνακες,
Οι Χώροι R^n,
Διανυσματικοί Χώροι.

Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό:
Κεφ1. Εισαγωγικές Έννοιες,
Κεφ2. Γραμμικά Συστήματα,
Κεφ3. Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα,
Κεφ4. Ορίζουσες,
Κεφ5. Οι χώροι R^n,
Κεφ6. Διανυσματικοί χώροι,
Κεφ7. Βάση και Διάσταση.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- Να σας εξοικειώσει με την άλγεβρα πινάκων και τις κλιμακωτές μορφές, τις μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, τον υπολογισμό και τις βασικές ιδιότητες των οριζουσών, τα κριτήρια αντιστρεψιμότητας πινάκων και τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα.

- Να σας βοηθήσει στην κατανόηση των εννοιών του διανυσματικού χώρου και υποχώρου, της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων, των συνόλων γεννητόρων, των βάσεων και της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου καθώς και να σας επιτρέψει να εκτελείτε με άνεση και ακρίβεια τους απαιτούμενους υπολογισμούς.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον. 12) Θεωρούμε τους πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ και $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & -5 & 1\\ -2 & 1 & -25\end{pmatrix}\in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

i) Να εξηγηθεί γιατί ορίζονται οι πίνακες AB και $B+A^TA$. Να αποδειχθεί ότι $(AB)^T=BA^T$.

ii) Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $B+A^TA$ είναι συμμετρικός και αντιστρέψιμος.

iii) Να υπολογιστεί το ίχνος του πίνακα $5(B+A^TA)$ και η ορίζουσα του πίνακα $2(B+A^TA)^{-1}$.

β) (μον. 8) Δίνεται ο πίνακας $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

i) Να υπολογιστεί ο πίνακας C^3-2C^2-C+2I.

ii) Να αποδειχθεί ότι ο C είναι αντιστρέψιμος και να υπολογιστεί ο C^{-1}.

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 13\end{pmatrix}\in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $\operatorname{adj}(A)$.

β) (μον. 12) Δίνεται ο πίνακας $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 8 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 6 & 3 & 0\end{pmatrix}\in M_{4,5}(\mathbb{R})$. Να υπολογιστούν η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του B, μια βάση του χώρου γραμμών του B^T και η διάσταση του μηδενόχωρου του B.

γ) (μον. 4) Έστω n περιττός φυσικός και $C\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ορθογώνιος πίνακας με $\det(C)=1$. Να αποδειχθεί ότι $C^T(C-I)=(I-C)^T$ και $\det(C-I)=0$.

Άσκηση 3 (Μον. 20)

α) (μον. 7) Να βρεθούν όλες οι λύσεις $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$ του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x-2z+4w&=1\\ 5x-2z-12w&=13\\ y-w&=2\end{aligned}\ .$$

β) (μον. 7) Να βρεθούν όλες οι λύσεις $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0\\ y+2z&=-1\\ 3x-2y+2z&=8\\ x+10y-10z&=80\end{aligned}\ .$$

γ) (μον. 6) Για ποιές τιμές της πραγματικής σταθεράς a έχει το γραμμικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
x - z &= 0 \\
x + 2y + az &= 3a + 9 \\
3x + y - 2z &= a + 3
\end{aligned}
$$

μοναδική λύση $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 8) Να εξεταστεί αν:

i) το σύνολο $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x + y + z - 1 \geq 0\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

ii) το σύνολο $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = x^2 + x\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$.

β) (μον. 12) Θεωρούμε τους εξής υπόχωρους του $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}, \qquad W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 :\ x + 2y - 2z - w = 0\}.$$

i) Να βρεθεί βάση του V και βάση του W.

ii) Να βρεθεί βάση του $V \cap W$ και να αποδειχθεί ότι $V + W = \mathbb{R}^4$.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 8) Να βρεθεί βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 7, 10)$, $v_2 = (2, 3, -1)$, $v_3 = (7, 60, 91)$ και $v_4 = (8, 12, -4)$.

β) (μον. 12) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3 με πραγματικούς συντελεστές. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W = \{ f \in V :\ f(2) = 0 \}$ είναι υπόχωρος του V και να βρεθεί βάση του W.