

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο **παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση** και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την Γ.Ε και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης Γ.Ε όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 6η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge6_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)	
--	--

Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	11/05/2016 23:59μμ
Ακ. Έτος	2015 -16	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	6	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6Η

Ημερομηνία Αποστολής της εργασίας στον Φοιτητή 14 Απριλίου 2016

Ημερομηνία τελικής υποβολής της εργασίας από τον Φοιτητή 11 Μαΐου 2016

Οι ασκήσεις της 6ης εργασίας αναφέρονται στις

Ενότητα 2 (2.1 – 2.5) (Βασική Πιθανοθεωρία)

Ενότητα 3 (3.1, 3.3.1, 4.1, 4.4-4.6) (Τυχαίες μεταβλητές και χαρακτηριστικά των κατανομών τους – Χρήσιμα πρότυπα κατανομών)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Πιθανότητες και Στατιστική Ι**» του κ. Ι. Κουτρουβέλη

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : **Πιθανότητες** Πιθανότητες Ι και Πιθανότητες ΙΙ

Στόχοι:

α) η κατανόηση της έννοιας του δειγματοχώρου και της πιθανότητας καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας ενδεχομένων βάσει προτάσεων από την αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων,

β) η κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής και ο υπολογισμός βάσει κατάλληλων συναρτήσεων της πιθανοτικής συμπεριφοράς τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

Αιτιολογήστε προσεκτικά τις απαντήσεις σας!

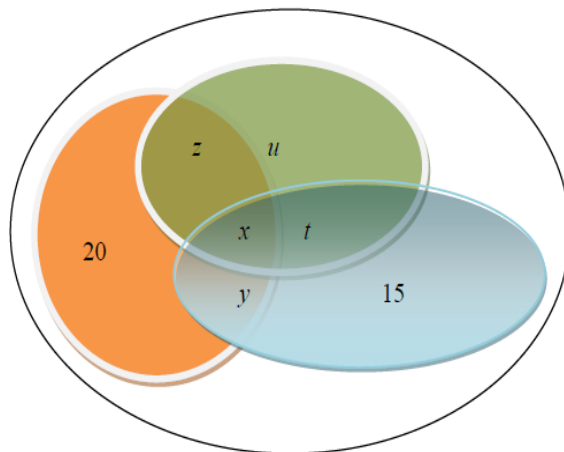
Άσκηση 1 (20 μον.)

A) (10 μον.) Διεξάγεται έρευνα για να μετρήσει το ποσοστό των φοιτητών που ασχολούνται στον ελεύθερο χρόνο τους είτε με τον κινηματογράφο είτε με την άθληση είτε με την λογοτεχνία. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι το 10% δεν ασχολείται με κανένα από τα παραπάνω, με κινηματογράφο ασχολείται το 45%, με την άθληση ασχολείται το 48% και με την λογοτεχνία το 35%. Επίσης, το ποσοστό που ασχολείται και με κινηματογράφο και με λογοτεχνία είναι 12% , μόνο με κινηματογράφο 20% και μόνο με λογοτεχνία 15%. Στον δειγματικό χώρο όλων των φοιτητών, συμβολίζουμε με K , A , Λ τα υποσύνολα των φοιτητών που ασχολούνται αντίστοιχα με τον κινηματογράφο, την άθληση, την λογοτεχνία. Να βρεθεί το ποσοστό που ασχολείται

- i) και με τις τρεις δραστηριότητες,
 - ii) με τον κινηματογράφο και την λογοτεχνία αλλά όχι με την άθληση,
 - iii) με τον κινηματογράφο και την άθληση αλλά όχι με την λογοτεχνία,
 - iv) με την λογοτεχνία και την άθληση αλλά όχι με τον κινηματογράφο,
 - v) μόνο με την άθληση
- και να εκφρασθεί ως πιθανότητα αντιστοίχου υποσυνόλου. Για παράδειγμα, από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι $20\% = P(K \cap A' \cap \Lambda')$, $15\% = P(K' \cap A' \cap \Lambda)$

κ.ο.κ.

Υπόδειξη: Καταstrώστε ένα σύστημα εξισώσεων για τους αγνώστους x, y, z, t, u χρησιμοποιώντας το παρακάτω διάγραμμα Venn όπου τα παραπάνω υποσύνολα K , A , Λ αντιστοιχούν στα χρώματα **K**, **A** και **Λ**.



B) (10 μον.) Ο παίκτης Π_1 έχει 3 κυβικά ζάρια A , B , Γ , με έδρες που φέρουν τους αριθμούς

το A : 1, 1, 6, 6, 8, 8,

το B : 2, 2, 4, 4, 9, 9,

το Γ : 3, 3, 5, 5, 7, 7

και προτείνει σέ άλλο παίκτη Π_2 να παίξουν το εξής παιχνίδι:

Ο παίκτης Π_2 επιλέγει όποιο ζάρι επιθυμεί και το δηλώνει στον Π_1 . Στη συνέχεια ο Π_1 επιλέγει ένα από τα δύο ζάρια που απομένουν. Ρίχνει καθένας το ζάρι που επέλεξε και νικά όποιος φέρει τον μεγαλύτερο αριθμό. Και τα τρία ζάρια είναι αμερόληπτα και οι ρίψεις ανεξάρτητες. Δείξτε ότι ο Π_1 μπορεί πάντοτε να επιλέξει ζάρι κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα αυτός να νικήσει να είναι μεγαλύτερη του 50%.

Υπόδειξη: Για κάθε ζεύγος ζαριών, δώστε τον δειγματικό χώρο και τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων.

Λύση άσκησης 1

Άσκηση 2 (20 μον.)

A) Σε ένα δειγματικό χώρο εφοδιασμένο με πιθανότητα P , θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_\kappa$, για $\kappa \geq 2$. Δείξτε ότι

i) (4 μον.) αν τα A_1, A_2 είναι ανεξάρτητα τότε και τα A'_1, A'_2 είναι ανεξάρτητα.

ii) (6 μον.)
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\kappa) \leq \sum_{\mu=1}^{\kappa} P(A_\mu).$$

Υπόδειξη: Για το (ii), χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή.

B) (10 μον.) Έχουμε δύο κιβώτια. Το κιβώτιο K_1 περιέχει λ λευκές και μ μαύρες μπάλες και το κιβώτιο K_2 περιέχει Λ λευκές και M μαύρες μπάλες ($\lambda, \mu, \Lambda, M > 0$). Επιλέγουμε τυχαία ένα κιβώτιο και από αυτό επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των λ, μ, Λ, M όταν τα γεγονότα "επιλέγω το K_1 κιβώτιο" και "η μπάλα που επιλέγω είναι μαύρη" είναι ανεξάρτητα; Σε περίπτωση που ισχύει η σχέση αυτή, τα γεγονότα "επιλέγω το K_1 κιβώτιο" και "η μπάλα που επιλέγω είναι λευκή" είναι ανεξάρτητα;

Λύση άσκησης 2

Άσκηση 3 (20 μον.)

A) (12 μον.) Έχει διαπιστωθεί ότι 4/20 των ηλεκτρονικών μηνυμάτων που λαμβάνονται είναι spam. Το αντίστοιχο λογισμικό χαρακτηρίζει ως spam σε ποσοστό 18/20 ένα μήνυμα που είναι όντως spam, και σε ποσοστό 1/20 ένα μήνυμα που δεν είναι spam.

i) Να βρεθεί το ποσοστό των ηλεκτρονικών μηνυμάτων που δεν χαρακτηρίζονται ως spam.

ii) Να βρεθεί το ποσοστό των μηνυμάτων που είναι όντως spam δεδομένου ότι αυτά έχουν χαρακτηριστεί ως spam.

Υπόδειξη: Συμβολίζουμε με Σ το σύνολο των μηνυμάτων που είναι spam και με X αυτά που το λογισμικό χαρακτηρίζει ως spam.

B) Μια βιομηχανία ηλεκτρονικών παράγει ποντίκια H/Y, 2% από τα οποία είναι ελαττωματικά. Να υπολογίσετε, με δύο τρόπους, την πιθανότητα να μην υπάρχουν ελαττωματικά ποντίκια σε μία παραγγελία 300 τεμαχίων:

i) (4 μον.) θεωρώντας την διωνυμική κατανομή $B(300, 0.02)$,

ii) (4 μον.) θεωρώντας ότι, καθώς ο αριθμός 300 των τεμαχίων είναι αρκετά μεγάλος και η τιμή της παραμέτρου $p=0.02$ αρκετά μικρή, η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή $B(n, p)$ προσεγγίζεται από την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = n p$.

Λύση άσκησης 3

Άσκηση 4 (20 μον.)

A) Ο χρόνος σε ώρες που μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος την συσκευή κινητού τηλεφώνου ορισμένου τύπου όταν η μπαταρία είναι φορτισμένη, είναι μία τ.μ. X που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ($\lambda > 0$) της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) δίνεται από:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Γνωρίζουμε ότι $P(X > 2) = 50\%$.

i) (3 μον.) Να προσδιοριστεί η παράμετρος λ .

ii) (3 μον.) Να βρεθεί το σημείο x έτσι ώστε $P(X \geq x) = 90\%$.

iii) (3 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X > 2 | X > 1)$. Τι παρατηρείτε;

iv) (3 μον.) Αν επιλέξουμε τυχαία 12 συσκευές του συγκεκριμένου τύπου, ποιά είναι η πιθανότητα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν 10 τουλάχιστον από αυτές (όταν η μπαταρία είναι φορτισμένη) για τουλάχιστον 2 ώρες (κάθε μία από αυτές);

B) (8 μον.) Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου k , ώστε η $f(x) = \begin{cases} k x^2 (1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) μιας τ.μ. X και στην συνέχεια να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση αυτής της τ.μ.

Λύση άσκησης 4

Άσκηση 5 (20 μον.)

A) Η διάρκεια ζωής μιας (συγκεκριμένου τύπου) συσκευής που κατασκευάζεται σε ένα εργοστάσιο είναι τ.μ. X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2 . Γνωρίζουμε ότι $P(X > 7) = p_1 = 0.20$ και $P(X \leq 4) = p_2 = 0.25$.

i) (6 μον.) Να βρεθούν οι τιμές της μέσης τιμής μ και της τυπικής απόκλισης σ .

ii) (4 μον.) Αν αγοράσουμε 20 τέτοιες συσκευές ποιά είναι η πιθανότητα 18 από αυτές να συνεχίζουν να λειτουργούν έπειτα από 4 χρόνια; Μπορείτε να δώσετε το αποτέλεσμα ως απλοποιημένη παράσταση που περιέχει το p_2 .

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $\Phi(0.67)=0.75$, $\Phi(0.84)=0.8$.

B) Δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 ακολουθούν την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1 = 50, \sigma_1^2 = 9$ και $\mu_2 = 55, \sigma_2^2 = 16$.

i) (4 μον.) Ποιά κατανομή ακολουθεί η τ.μ. $X = X_1 + X_2$ και ποιες είναι οι τιμές των παραμέτρων αυτής;

ii) (6 μον.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(95 < X \leq 120)$.

Σημείωση: στο τέλος των εκφωνήσεων θα βρείτε πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Λύση άσκησης 5

Πίνακας Κανονικής Κατανομής

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή (Standardized Normal Distribution Function)

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-t^2/2} dt$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5190	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7969	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8513	.8554	.8577	.8529	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9215	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9492	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990