



Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο **παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση** και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., **το όνομα του αρχείου για τη 4η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «ioannou_ge4_pli12.doc».**

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)	
--	--

Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	9/3/2016 11:59 μμ
Ακ. Έτος	2015 - 16	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	4	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου



Ημερομηνία Ανάρτησης:

9 Φεβρουαρίου 2016

Ημερομηνία Παράδοσης της εργασίας από τον Φοιτητή:

9 Μαρτίου 2016 (καταληκτική)

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να έχουν μελετηθεί τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των συγγραμμάτων και του βοηθητικού υλικού.

Οι ασκήσεις της 4^{ης} εργασίας αναφέρονται στις ενότητες:

Ενότητα 2 (Ακολουθίες – Όρια)

Ενότητα 3 (Σειρές)

Ενότητα 8 (Σειρές Taylor)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι – Τόμος Α' - Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο **ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ** στο study.eap.gr ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό:

Ακολουθίες,
Σειρές,
Σειρές Taylor.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

Η κατανόηση σημαντικών εννοιών στις ακολουθίες και σειρές πραγματικών αριθμών συγκεκριμένα:

Ακολουθίες: φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες, απειριζόμενες, κριτήρια σύγκλισης, εύρεση ορίων και ασυμπτωτικής συμπεριφοράς.

Σειρές: ειδικές κατηγορίες, κριτήρια σύγκλισης, άθροισμα και εκτίμηση σφάλματος από μερικά αθροίσματα, φράγματα αθροίσματος σειράς.

Δυναμοσειρές και σειρές Taylor, μέθοδοι εύρεσης σειρών Taylor και Maclaurin.

Αιτιολογήστε προσεκτικά ΟΛΕΣ τις απαντήσεις σας

Άσκηση 1 (μον. 20)

A) (μον. 8) Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση τις ακολουθίες με γενικούς όρους:

$$\text{i) } n \tan\left(\frac{1}{1+n}\right), \quad \text{ii) } \frac{n^{3/2}}{1+2^n}.$$

B) (μον. 12) Για $\alpha > 0$, να υπολογισθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών καθώς $n \rightarrow \infty$ (χρειάζεται διερεύνηση):

$$\text{i) } a_n = \frac{1+n^2+5n^3}{n^\alpha(n^2+2)}, \quad \text{ii) } b_n = \frac{2^n+3^n}{\alpha^n}, \quad \text{iii) } c_n = \sqrt{4n^2+2} - \alpha n.$$

<χώρος απάντησης 1ης άσκησης >

Άσκηση 2 (μον. 20)

A) (μον. 4) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο

$$\text{i) } a_n = \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{n^2}, \quad \text{ii) } b_n = \left(\frac{\lambda + n}{n + \kappa}\right)^n \text{ όπου } \kappa, \lambda \text{ θετικοί ακέραιοι.}$$

B) (μον. 4) Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού w η ακολουθία με γενικό όρο $\left(\frac{w^n}{1 + w^{2n}}\right)$ συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό) και ποιό είναι το αντίστοιχο όριο;

Γ) (μον. 12) Για δύο ακολουθίες (a_n) , (b_n) που είναι θετικών όρων και τείνουν στο άπειρο γράφουμε $(b_n) \ll (a_n)$ και διαβάζουμε: "η (b_n) έχει μικρότερη τάξη από την (a_n) καθώς $n \rightarrow \infty$ ", αν

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Ισχύει επίσης ότι αν (a_n) , (b_n) , (c_n) είναι ακολουθίες θετικών όρων που τείνουν στο άπειρο με $(b_n) \ll (a_n)$ και $(c_n) \ll (b_n)$, τότε $(c_n) \ll (a_n)$. Να διατάξετε ως προς την σχέση $\ll$ τις ακολουθίες:

$$(n + 2^n), (\sqrt{n + 1}), (n \ln(n + 1)), (n \ln(\ln(n + 2))), (\ln(\ln(n^2 + 1))), n + \ln(n).$$

<χώρος απάντησης 2ης άσκησης >

Άσκηση 3 (μον. 20)

A) (μον. 10) Δείξτε ότι ορίζεται ακολουθία (a_n) που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $n = 1, 2, \dots$, με $a_1 = 1$ και εξετάστε την σύγκλισή της σε πραγματικό αριθμό.

Υπόδειξη: δείξτε ότι η ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη.

B) (μον. 10) Δείξτε ότι ορίζεται ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{3 + x_n}, n = 1, 2, \dots, \text{ με } x_1 = 1, \text{ και εξετάστε την σύγκλισή της σε πραγματικό αριθμό.}$$

Υπόδειξη: κάνετε εφαρμογή της μεθόδου προσέγγισης ριζών (σελ. 91) του συγγράμματος αφού επαληθεύσετε τις απαιτούμενες συνθήκες για την συνάρτηση $f(x) = \frac{2+x}{3+x}$, στο διάστημα $[0, 2]$.

<χώρος απάντησης 3ης άσκησης >

Άσκηση 4 (μον. 20)

A) (4 μον.) Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές: i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5+2n+n^{5/2}}$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$.

B) (2 μον.) Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ και στην συνέχεια ένα άνω φράγμα για το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-n}$.

Γ) (2 μον.) Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)^{1/2}}$ συγκλίνει και να δώσετε εκτίμηση του σφάλματος υπολογισμού του αθροίσματός της από τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=0}^4 (-1)^n \frac{1}{(n+4)^{1/2}}$, $\sum_{n=0}^{21} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^{1/2}}$ διαπιστώνοντας την "αργή" σύγκλιση.

Δ) (12 μον.) Να προσδιοριστεί το διάστημα σύγκλισης καθεμιάς από τις παρακάτω δυναμοσειρές:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}, \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} (x-2)^n.$$

<χώρος απάντησης 4ης άσκησης>

Άσκηση 5 (μον. 20)

A) (μον. 4) Να υπολογιστούν οι πέντε πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Maclaurin της συνάρτησης με τύπο $\frac{1-x^2}{1+x^2}$. (Υπόδειξη: χωρίστε το πολυωνυμικό μέρος της ρητής συνάρτησης και χρησιμοποιήστε γνωστή σειρά Maclaurin).

B) (μον. 4) Να υπολογιστούν οι τέσσερις πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης με τύπο $\frac{1}{x} + \frac{2}{3-x}$ γύρω από το $x=1$.

Γ) (μον. 12) Χρησιμοποιώντας τα γνωστά αναπτύγματα MacLaurin κατάλληλων συναρτήσεων

εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους $\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$, $\frac{e^x-1-x}{x^2}$, επεκτείνονται για $x=0$ με τιμή που θα προσδιορίσετε ώστε να είναι αναλυτικές σε διάστημα γύρω από αυτό. Δώστε το ανάπτυγμα Maclaurin και το αντίστοιχο διάστημα σε κάθε περίπτωση που γίνεται η αναλυτική επέκταση στο 0.

<χώρος απάντησης 5ης άσκησης >