

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)****ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

Οι προτεινόμενες λύσεις είναι ενδεικτικές. Οποιαδήποτε άλλη ορθή λύση είναι αποδεκτή.

Ημερομηνία Ανάρτησης: 5 Ιανουαρίου 2016

Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής: 3 Φεβρουαρίου 2016 (καταληκτική)

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 2 (2.1 πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής)

Ενότητα 4 (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)

Ενότητα 5 (Παράγωγος)

Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)

Ενότητα 7 (Ακρότατα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής και για την εκπόνηση της εργασίας θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο [ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ](http://study.eap.gr) στο study.eap.gr ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός

Σύνολα Αριθμών,

Συναρτήσεις,

Ορια-Συνέχεια,

Παράγωγοι,

Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού.

όπως και παλαιότερες γραπτές εργασίες και σημειώσεις των ομαδικών συμβουλευτικών συναντήσεων.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση

- της έννοιας της πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής,
- της έννοιας του ορίου και συνέχειας συναρτήσεων και των σχετικών ιδιοτήτων,
- της παραγώγου (πρώτης και ανώτερης τάξης),
- των κανόνων παραγωγής,
- των θεωρημάτων του διαφορικού λογισμού και
- των εφαρμογών αυτών στον υπολογισμό ορίων, στην εύρεση ακροτάτων τιμών, στην μελέτη συνάρτησης και στην απόδειξη ανισοτικών σχέσεων μεταξύ συναρτήσεων.

Αιτιολογήστε προσεκτικά ΟΛΕΣ τις απαντήσεις σας

Άσκηση 1 (Μον. 20)

A) (μον. 10) Να βρεθούν όλες οι τιμές των α, β, γ στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + \beta, & x < 1 \\ x^2 + \gamma x, & x \geq 1 \end{cases},$$

είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και να δοθεί ο τύπος της φ' . Πού είναι η φ' παραγωγίσιμη;

Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι η φ ορίζεται μέσω πολωνυμικών (άρα και παραγωγισίμων) συναρτήσεων περιορισμένων σε αντίστοιχα διαστήματα.

B) (μον. 10) Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της 1^{ης} παραγώγου (εκεί όπου η 1^η παράγωγος ορίζεται):

i) $f(x) = (x \ln x)^{-1}$, ii) $g(x) = x e^{-x}$, iii) $h(x) = (1-x)^{-1}$.

Λύση άσκησης 1

A) Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για $x < 1$ ως περιορισμός της πολωνυμικής συνάρτησης $p(x) \equiv x^3 + \alpha x + \beta$ στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα και για $x > 1$ ως περιορισμός της πολωνυμικής συνάρτησης $q(x) \equiv x^2 + \gamma x$. Άρα, για να είναι η φ παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $x=1$.

Στο $x=1$: για τη συνέχεια πρέπει και αρκεί: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \varphi(1)$ (1)

Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \gamma x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (\gamma x) = 1 + \gamma = \varphi(1)$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + \alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3) + \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} (\beta) = 1 + \alpha + \beta.$$

$$\text{οπότε η (1) ισοδυναμεί με: } 1 + \alpha + \beta = 1 + \gamma \text{ δηλαδή } \alpha + \beta = \gamma \quad (2)$$

$$\text{και η σχέση αυτή εξασφαλίζει ότι } \varphi(1) = p(1) = q(1). \quad (3)$$

Με την σχέση αυτή για την παραγωγισιμότητα στο 1 πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

$$\text{Ομως } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{p(x) - p(1)}{x - 1} = p'(x)|_{x=1} = (3x^2 + \alpha)|_{x=1} = 3 + \alpha$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = q'(x)|_{x=1} = (2x + \gamma)|_{x=1} = 2 + \gamma$$

$$\text{Οπότε η (4) ισοδυναμεί διαδοχικά με: } 3 + \alpha = 2 + \gamma \Leftrightarrow \gamma = \alpha + 1, \quad (5)$$

και λύνοντας το σύστημα των (2) και (5) έχουμε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ όταν και μόνο

$$\text{όταν: } \beta = 1 \text{ και } \gamma = \alpha + 1 \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ οπότε η } \varphi \text{ γράφεται: } \varphi(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + 1, & x < 1 \\ x^2 + (\alpha + 1)x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ και ο}$$

$$\text{ζητούμενος τύπος της } \varphi' \text{ είναι: } \varphi'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha & x < 1 \\ 2x + \gamma & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 + \alpha & x < 1 \\ 2x + \alpha + 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Παρόμοια η } \varphi' \text{ είναι}$$

συνεχής και παραγωγίσιμη για $x < 1$ και για $x > 1$, ως περιορισμός πολωνυμικών συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα. Επιπλέον για $x=1$ είναι συνεχής με $\varphi'(1) = 2 \cdot 1 + \alpha + 1 = 3 + \alpha$. Εξετάζουμε την

παραγωγισιμότητά της στο 1, όπως πριν: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(1)}{x - 1} = (3x^2 + \alpha)' \Big|_{x=1} = (6x) \Big|_{x=1} = 6$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(1)}{x - 1} = (2x + \alpha + 1)' \Big|_{x=1} = (2) \Big|_{x=1} = 2 \text{ και συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(1)}{x - 1}.$$

Αρα η φ' είναι παραγωγίσιμη για κάθε x διάφορο του 1 και μόνο.

B)

i) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = (x \ln x)^{-1} = \frac{1}{x \ln x}$ πρέπει και αρκεί να ορίζεται ο παρονομαστής και να είναι μή μηδενικός δηλαδή $x > 0$ και $x \ln x \neq 0$. Οπότε $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Η πρώτη παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης είναι:

$f'(x) = \frac{-(x \ln x)'}{x^2 \ln^2 x} = -\frac{\ln x + x/x}{x^2 \ln^2 x} = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} \quad \forall x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και το πρόσημό της είναι το πρόσημο του αριθμητή καθώς ο παρονομαστής είναι παντα θετικός. Αρα έχουμε

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1}$. Παρόμοια για την αντίθετη φορά επιπλέον δε

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1}$ οπότε έχουμε τον ακόλουθο

πίνακα προσήμων:

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
πρόσημο $f'(x)$		+	0	-

ii) Η $g(x) = xe^{-x}$ ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη παντού και $g'(x) = x'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x}(1 - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. και το πρόσημο είναι το πρόσημο του παράγοντα $1 - x$, οπότε προκύπτει ο πίνακας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
πρόσημο $g'(x)$		+	0

iii) Η $h(x) = (1 - x)^{-1} = \frac{1}{1 - x}$, ορίζεται όταν και μόνο όταν $1 - x \neq 0$, οπότε $D_h = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Η πρώτη παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης είναι: $h'(x) = \left(\frac{1}{1 - x} \right)' = \frac{1}{(1 - x)^2}$

$h'(x) > 0$ γιατί $(1 - x)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad x \neq 1$

Το πρόσημο της 1^{ης} παραγώγου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
πρόσημο $h'(x)$		+	+

Άσκηση 2. (Μον. 20)

A) (μον. 9) Δώστε τον τύπο της γραμμικής προσέγγισης της συνάρτησης $(1+x)^k$ (k τυχόν πραγματικός αριθμός) για x γύρω από το 0, με την βοήθεια της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημά της στο σημείο $(0,1)$ και, στην συνέχεια, κάνετε χρήση αυτού του τύπου για να βρείτε προσεγγίσεις (για x γύρω από το 0) για τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\text{i)} \quad g(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \text{ii)} \quad h(x) = \sqrt[3]{1+5x^4}.$$

B) Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο αντίστοιχο διάστημα:

$$\text{i)} \quad (\text{μον. 4}) \quad f(x) = x^2 \sqrt{1-x^2}, \text{ στο διάστημα } [-1/2, 3/4],$$

$$\text{ii)} \quad (\text{μον. 3}) \quad h(x) = x^3 - 6x^2 + 13x, \text{ στο διάστημα } [1, 3],$$

$$\text{iii)} \quad (\text{μον. 4}) \quad g(x) = x e^{-x \ln 2}, \text{ στο διάστημα } [1, 4].$$

Λύση άσκησης 2

A) Ο ζητούμενος τύπος με βάση τη σχέση 5.30 (Γενικά μαθηματικά I, Τόμος Α, Σελ. 80) είναι:

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ με } x_0 = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = \left((1+x)^k \right)' = k(1+x)^{k-1} \frac{d(1+x)}{dx} = k(1+x)^{k-1} \cdot 1 = k(1+x)^{k-1},$$

$$\text{Άρα: } f(x) \approx k(x-0) + f(0) = kx + (1+0)^k = kx + 1 \text{ για } x \text{ γύρω από το } 0.$$

Για $k = -1$ έχουμε $g(x) = (1+x)^{-1} \approx -1x + 1 = -x + 1$ και για $k = 1/3$ έχουμε $(1+y)^{\frac{1}{3}} \approx (y/3) + 1$ οπότε θέτοντας $y = 5x^4$ έχουμε $h(x) \approx \frac{5}{3}x^4 + 1$.

B) i) Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως σύνθεση αλγεβρικών άρα συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-1/2, 3/4]$.

$$f'(x) = \left(x^2 \sqrt{1-x^2} \right)' = (x^2)' \sqrt{1-x^2} + x^2 \left(\sqrt{1-x^2} \right)' = 2x \sqrt{1-x^2} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = 2x \sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x(1-x^2) - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(2-3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Από τις παραπάνω ρίζες τις 1^{ης} παραγώγου μόνο η $x=0$ ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[-1/2, 3/4]$.

$$\text{Υπολογίζουμε: } f(0) = \left(0^2 \sqrt{1-0^2} \right) = 0, \quad f(-1/2) = \left(\frac{1}{4} \sqrt{1-\frac{1}{4}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8}, \quad f(3/4) = \left(\frac{9}{16} \sqrt{1-\frac{9}{16}} \right) = \frac{9\sqrt{7}}{64}.$$

$$\text{Άρα η ελάχιστη τιμή είναι η } f(0) = 0 \text{ και η μέγιστη είναι η } f(3/4) = \frac{9\sqrt{7}}{64}.$$

ii) Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα και συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,3]$. Υπολογίζουμε $h'(x) = (x^3 - 6x^2 + 13x)' = 3x^2 - 12x + 13$ που δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\mathbb{R}$ καθώς η διακρίνουσα $\Delta = 12 \cdot 12 - 12 \cdot 13 = -12 < 0$. Υπολογίζουμε $h(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 13 \cdot 1 = 8$, $h(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 13 \cdot 3 = 27 - 54 + 39 = 12$ οπότε η ελάχιστη τιμή είναι η $h(1) = 8$ και η μέγιστη είναι η $h(3) = 12$.

iii) Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ και $g'(x) = (x)' e^{-x \ln 2} + x(e^{-x \ln 2})' = e^{-x \ln 2} - x(\ln 2) \cdot e^{-x \ln 2} = e^{-x \ln 2}(1 - x \ln 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x \ln 2}(1 - x \ln 2) = 0 \Leftrightarrow 1 - x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}, \text{ οπότε: } g(1) = 1e^{-\ln 2} = \frac{1}{2},$$

$$g(4) = 4e^{-4 \ln 2} = 4e^{-\ln 2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \quad g\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right) e^{-\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \ln 2} = \left(\frac{1}{\ln 2}\right) e^{-1} = \frac{1}{e \ln 2}.$$

$$\text{Άρα η ελάχιστη τιμή είναι η } g(4) = \frac{1}{4} \text{ και η μέγιστη είναι η } g\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{e \ln 2}.$$

Άσκηση 3 (Μον. 20)

A) (μον. 5) Δείξτε ότι $e^x \geq 1 + x + x^2/2$ για κάθε $x \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

B) (μον. 5) Δείξτε ότι $|\sin a - \sin b| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|a - b|$ για κάθε a, b στο διάστημα $[\pi/4, 3\pi/4]$.

Γ) (μον. 4) Εστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση έτσι ώστε $g'(x) = xg(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Δείξτε ότι υπάρχει κ (πραγματικός αριθμός) ώστε $g(x) = \kappa e^{x^2/2}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Δ) Ισχύει ότι: αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε διάστημα Δ , τότε $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ για κάθε x_1, x_2 στο Δ . Εφαρμόστε την προηγούμενη πρόταση για να δείξετε ότι:

i) (μον.3) $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ για x_1, x_2 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(Υπόδειξη: δείξτε πρώτα ότι $\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2)}{2}$ για x_1, x_2 στο $(0, +\infty)$).

ii) (μον. 3) $(x_1 + x_2)^3 \leq 4(x_1^3 + x_2^3)$, για x_1, x_2 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση άσκησης 3

A) Θεωρώ την συνεχή και (απειρώς) παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, στο διάστημα

$[0, +\infty)$ και υπολογίζω $f'(x) = e^x - 1 - x$ και $f''(x) = e^x - 1$. Επειδή $f''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ έχουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και επειδή $f'(0) = 0$ έχουμε $f'(x) > 0$ οπότε και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε ότι $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα η ζητούμενη ανισότητα ισχύει και ως ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

B) Αν $a = b$ τότε ισχύει ως ισότητα. Έστω $\frac{\pi}{4} \leq a < b \leq \frac{3\pi}{4}$ (παρόμοια αν $b < a$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, με

$$f'(x) = \cos x. \text{ Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει } \xi \in (a, b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ δηλαδή } \cos \xi = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}.$$

Επειδή η συνάρτηση $\cos$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ έχουμε ότι

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} > \cos \xi > \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, δηλαδή $|\cos \xi| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε $\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ και τελικά παίρνουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = \frac{g(x)}{e^{x^2/2}}$. Επειδή η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $e^{x^2/2}$ παραγωγίσιμη και μη μηδενιζόμενη, η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$h'(x) = \left(\frac{g(x)}{e^{x^2/2}} \right)' = \frac{g'(x)e^{x^2/2} - g(x)(e^{x^2/2})'}{(e^{x^2/2})^2}, \text{ όμως } (e^{x^2/2})' = e^{x^2/2} \cdot \frac{d(x^2/2)}{dx} = e^{x^2/2} \cdot x \text{ και } g'(x) = xg(x)$$

οπότε: $h'(x) = \frac{xg(x)e^{x^2/2} - xg(x)e^{x^2/2}}{e^{x^2}} = \frac{0}{e^{x^2}} = 0$. Άρα η $h(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση δηλαδή υπάρχει κ

πραγματικός αριθμός με $h(x) = \frac{g(x)}{e^{x^2/2}} = \kappa$ και τελικά συμπεραίνουμε ότι $g(x) = \kappa e^{x^2/2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ)

i) Θεωρώ τη συνάρτηση: $f(x) = -\ln x$, $x \in (0, +\infty)$, με $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$.

Οπότε η f είναι κυρτή και συνεπώς ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{-\ln x_1 - \ln x_2}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\ln(x_1 \cdot x_2)}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \ln(x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

ii) Θεωρώ τη συνάρτηση: $f(x) = x^3$, $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x > 0, \forall x \in (0, +\infty)$

άρα η f είναι κυρτή, οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 \leq \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^3}{8} \leq \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^3 \leq \frac{8(x_1^3 + x_2^3)}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 \leq 4(x_1^3 + x_2^3).$$

Άσκηση 4. (Μον.20)

A) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) (μον. 2)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \ln(x)}{1 + x^2 \ln(x)}, \quad \text{ii) (μον. 2)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \cos(x)}{\sin(x) + x},$$

B) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) (μον. 3)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x}, \quad \text{ii) (μον. 4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2},$$

Γ) Να υπολογίσετε τα όρια για τις διάφορες τιμές της θετικής παραμέτρου α :

$$\text{i) (μον. 4)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^\alpha}, \quad \text{ii) (μον. 5)} \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^\alpha - x^\alpha).$$

Λύση άσκησης 4

A)

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \ln x}{1 + x^2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x \left(\frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \ln x \left(\frac{1}{x^2 \ln x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2 \ln x} + 1} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \ln x}{1 + x^2 \ln x} = \frac{0+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{ii) } \text{Έχουμε ότι } \frac{\sqrt{x} - \cos(x)}{\sin(x) + x} = \frac{x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{x} \right)}{x \left(\frac{\sin(x)}{x} + 1 \right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x} + 1} \quad (1).$$

Όμως $|\sin(x)| \leq 1$ οπότε $0 \leq \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$ και από το κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = 0$ άρα και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0. \text{ Ομοίως } |\cos(x)| \leq 1 \text{ οπότε } 0 \leq \left| \frac{\cos(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \text{ και από το κριτήριο παρεμβολής, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x} \right| = 0$$

άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Οπότε από την (1): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \cos(x)}{\sin(x) + x} = \frac{0+0}{0+1} = 0$.

B)

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x}{2}. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x}) = e^0 = 1.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1 - x/2}{(x^2)'} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((1+x)^{1/2}\right)' - (x/2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{4x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1\right)'}{4x}' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}}{4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{(1+x)^{-3/2}}{8}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Γ)

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^a} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{(x^a)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{ax^a \ln x} \quad (2)$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^a) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$. Οπότε από την (2): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^a} = 0 \quad \forall a > 0$.

ii) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^\alpha - x^\alpha$ με $\alpha > 0$ είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty - \infty)$.

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$ για $x > 0$ και το διάστημα $[x, x+1]$. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ άρα και στο $[x, x+1]$ με $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, οπότε πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα αυτό. Συνεπώς υπάρχει $\xi = \xi(x) \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x) \text{ δηλαδή } (x+1)^\alpha - x^\alpha = \alpha(\xi(x))^{\alpha-1}. \text{ Καθώς } x < \xi(x) < x+1,$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \xi(x) = +\infty$ (εγκιβωτισμός). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$1) \alpha=1: \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^\alpha - x^\alpha) = 1.$$

$$2) \alpha > 1: \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\xi(x))^{\alpha-1} = +\infty, \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^\alpha - x^\alpha) = +\infty.$$

$$3) \alpha < 1: \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\xi(x))^{\alpha-1} = 0, \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^\alpha - x^\alpha) = 0.$$

Σημείωση: Η απάντηση μπορεί να δοθεί και με εφαρμογή του κανόνα L'Hopital έπειτα από μετατροπή σε συνήθη απροσδιόριστη μορφή. Σημειωτέον ότι η απόδειξη του κανόνα βασίζεται στο ΘΜΤ.

Άσκηση 5. (Μον. 20)

A) Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με $f(x) = \ln(1+x^2)$.

i) (μον. 3) Αφού υπολογιστεί η f' , να προσδιοριστεί η μονοτονία της f και να βρεθούν τοπικά ακρότατα (αν υπάρχουν).

ii) (μον.3) Αφού υπολογιστεί η f'' , να βρεθεί σε ποιά διαστήματα η γραφική παράσταση της f είναι κυρτή, πού είναι κοίλη και να βρεθούν, αν υπάρχουν, σημεία καμπής της f .

iii) (μον. 2) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$ και να δοθεί η γραφική παράσταση της f μαζί με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $2\ln(x)$.

iv) (μον. 2) Να βρεθεί το σύνολο $T = f([0, +\infty))$ (σύνολο τιμών της f) και, αν υπάρχει, συνάρτηση $g: T \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(f(x)) = x$ για κάθε x στο $[0, +\infty)$.

B) Αφού προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού κάθε μιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες στις γραφικές παραστάσεις αυτών:

i) (μον. 2) $\frac{e^{-x} - 2xe^{2x}}{e^{2x} + 3e^{-x}}$, ii) (μον. 3) $(\ln x)^{-1}$, iii) (μον. 5) $x \tan^{-1}(x)$.

Σημείωση: $\tan^{-1}(x) = \text{Arctan}(x)$.

Λύση άσκησης 5

A)

i) Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και επίσης παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}. \text{ Επειδή } f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty), \text{ η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

$[0, +\infty)$. Επιπλέον η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$

ii) Υπολογίζουμε

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)' = \frac{(2x)'(1+x^2) - 2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1. \text{ Από τις ρίζες της παραγώγου 2ης τάξης στο πεδίο ορισμού}$$

$$\text{της } f \text{ ανήκει μόνο η } x=1 \text{ και } f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > |x| \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\text{και παρόμοια } f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 1. \text{ Αρα το σημείο } (1, f(1)) = (1, \ln 2) \text{ είναι σημείο καμπής}$$

ενώ αριστερά του σημείου δηλαδή στο διάστημα $(0,1)$ η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, δηλαδή είναι κυρτή, ενώ στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι κοίλη.

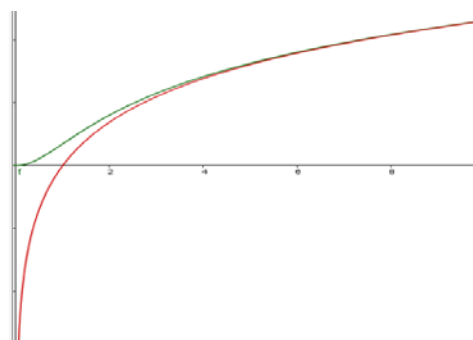
$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+x^2))'}{(\ln x)'} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1} \stackrel{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0}{=} \frac{2}{1+0} = 2.$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης είναι ο ακόλουθος:

x	0	1	$+\infty$
πρόσημο $f'(x)$	0	+	+
πρόσημο $f''(x)$		+	0
$f'(x)$			

Οπότε, η ζητούμενη γραφική παράσταση μαζί με τη γραφική παράσταση της $g(x) = 2 \ln x = \ln x^2$ δίνεται στο παραπλεύρως σχήμα (— f , — g):



iv) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, παίρνει την τιμή 0 στο $x=0$, επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x^2)) = \ln 1 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+x^2)) = +\infty$ και λόγω της συνέχειας της f , το σύνολο τιμών της f είναι : $T = f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [0, +\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[0, +\infty)$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

Λύνοντας την εξίσωση $y = \ln(1+x^2)$ ως προς $x \geq 0$ έχουμε: $y = \ln(1+x^2) \Leftrightarrow e^y = e^{\ln(1+x^2)} \Leftrightarrow e^y = 1+x^2 \Leftrightarrow x^2 = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e^y - 1}$ με $e^y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^y \geq 1 \Leftrightarrow \ln e^y \geq \ln 1 \Leftrightarrow y \geq 0$.

Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \ln(1+x^2)$, $x \geq 0$, ως εξής:

$f^{-1}: T \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$. Ισχύει ότι $f^{-1}(\ln(1+x^2)) = \sqrt{e^{\ln(1+x^2)} - 1} = \sqrt{1+x^2 - 1} = \sqrt{x^2} = x$ (αφού x μη αρνητικός), οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η: $g(x) = \sqrt{e^x - 1}$, $x \in [0, +\infty)$.

B)

i) Η δοσμένη συνάρτηση ορίζεται παντού καθώς $e^{2x} + 3e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι συνεχής οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επίσης ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - 2xe^{2x}}{e^{2x} + 3e^{-x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y + 2ye^{-2y}}{e^{-2y} + 3e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2ye^{-3y}}{e^{-3y} + 3} = \frac{1+0}{0+3} = \frac{1}{3}.$$

δηλαδή

έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1/3$ στο $-\infty$.

Για πλάγια ασύμπτωτη με εξίσωση $y=\lambda x+\beta$ στο $+\infty$, υπολογίζουμε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 2xe^{2x}}{e^{2x} + 3e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 2xe^{2x}}{x(e^{2x} + 3e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{2x} \left(\frac{1}{xe^{3x}} - 2 \right)}{xe^{2x} \left(1 + \frac{3}{e^{3x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^{3x}} - 2}{1 + \frac{3}{e^{3x}}} = \frac{0-2}{1+0} = -2$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x} - 2xe^{2x}}{e^{2x} + 3e^{-x}} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x} - 2xe^{2x}}{e^{2x} + 3e^{-x}} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x} - 2xe^{2x} + 2xe^{2x} + 2x3e^{-x}}{e^{2x} + 3e^{-x}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x} + 6xe^{-x}}{e^{2x} + 3e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}(1+6x)}{e^{-x}(e^{3x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+6x)}{(e^{3x} + 3)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+6x)'}{(e^{3x} + 3)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{3e^{3x}} = \frac{6}{\infty} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = -2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ii) Η δοσμένη συνάρτηση γράφεται: $f(x) = (\ln x)^{-1} = \frac{1}{\ln x}$.

Για να ορίζεται η δοσμένη συνάρτηση πρέπει: $x > 0$ και $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow e^{\ln x} \neq e^0 \Leftrightarrow x \neq 1$,

άρα το πεδίο ορισμού είναι το: $D_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \text{η ευθεία } x=1 \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της } f.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επομένως δεν υπάρχει

πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Στο 0 δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη καθώς το όριο από δεξιά είναι πεπερασμένο (ίσο με 0).

iii) Η δοσμένη συνάρτηση γράφεται: $g(x) = x \operatorname{Arc} \tan(x)$ έχει πεδίο ορισμού το πεδίο τιμών της $\tan(x)$, δηλαδή το $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι συνεχής, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για πλάγιες ασύμπτωτες της μορφής $y=\lambda x+\beta$ εξετάζουμε τα όρια:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{Arc} \tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arc} \tan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{και}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{Arc} \tan(x) - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\left(\operatorname{Arc} \tan(x) - \frac{\pi}{2} \right)}{x^{-1}} \right] \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\left(\operatorname{Arc} \tan(x) - \frac{\pi}{2} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^2}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{-1}{1+0} = -1$$

Άρα η ευθεία $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\text{Επίσης: } \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \operatorname{Arctan}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} x \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\left(\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{1}{x}} \right] \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{L' Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\left(\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^2}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{-1}{1+0} = -1$$

Άρα η ευθεία $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Αφού υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$.
