

### Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο [study.eap.gr](http://study.eap.gr) έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλλει με τη σειρά του στο [study.eap.gr](http://study.eap.gr). Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφα της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για την 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou\_ge1\_pli12.doc**».

#### ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

|                                                                          |         |                                                                                     |                    |
|--------------------------------------------------------------------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση) |         |                                                                                     |                    |
| Κωδικός Θ.Ε.                                                             | ΠΛΗ 12  | Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου                                                   |                    |
| Κωδικός Τμήματος                                                         |         | <b>Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)</b>                              | 21/12/2016 23:59μμ |
| Ακ. Έτος                                                                 | 2016-17 | Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή                                           |                    |
| α/α Γ.Ε.                                                                 | 2       | Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή; | OXI                |

**Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή:** Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από μένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

#### ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

|                                            |  |
|--------------------------------------------|--|
| Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή  |  |
| Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή  |  |
| <b>Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)</b> |  |

Υπογραφή

Φοιτητή

Υπογραφή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2<sup>η</sup>

Ημερομηνία Ανάρτησης: Τετάρτη 16 Νοεμβρίου 2016  
Ημερομηνία παράδοσης εργασίας: Κυριακή 18 Δεκεμβρίου 2016  
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής: Τετάρτη 21 Δεκεμβρίου 2016<sup>1</sup>  
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων: Δευτέρα 26 Δεκεμβρίου 2016

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 2<sup>ης</sup> εργασίας αναφέρονται στα:

**Κεφάλαιο 3** (Χώροι εσωτερικού γινομένου)

**Κεφάλαιο 4** (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)

**Κεφάλαιο 5** (Χαρακτηριστικά μεγέθη και κανονικές μορφές γραμμικών απεικονίσεων) του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό**

που υπάρχει στο: [study.eap.gr](http://study.eap.gr)

**Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό:** **Κεφ6** (Διανυσματικοί Χώροι), **Κεφ7** (Βάσεις και Διάσταση), **Κεφ8** (Γραμμικές Απεικονίσεις), **Κεφ9** (Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα), **Κεφ10** (Διαγωνοποίηση), **Κεφ11** (Τετραγωνικές Μορφές).

**Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό :** από Γραμμική Άλγεβρα: Διανυσματικοί Χώροι, Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

**Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:**

- η εξοικείωση με τις έννοιες της ορθογωνιότητας, της προβολής και του ορθογωνίου συμπληρώματος ενός υπόχωρου,
- η κατανόηση της διαδικασίας μετατροπής μιας μη ορθοκανονικής βάσης ενός Ευκλείδειου χώρου σε μια νέα βάση που είναι ορθοκανονική μέσω της μεθόδου Gram-Schmidt,
- η σύνδεση της έννοιας της ορθοκανονικής βάσης στον  $\mathbf{R}^n$  με την έννοια του ορθογώνιου πίνακα που ανήκει στον χώρο των πινάκων  $M_{n,n}(\mathbf{R})$ ,
- η κατανόηση της έννοιας της γραμμικής απεικόνισης και συνεπώς η ικανότητα ελέγχου αν μια απεικόνιση είναι γραμμική ή όχι,
- η κατανόηση ορισμών που συνδέονται με τις γραμμικές απεικονίσεις και μετασχηματισμούς όπως πυρήνας, εικόνα, πίνακας αναπαράστασης, βαθμός, μηδενικότητα, μονομορφισμός, επιμορφισμός, ισομορφισμός.
- η κατανόηση του τρόπου υπολογισμού χαρακτηριστικών μεγεθών μιας γραμμικής απεικόνισης αλλά και ενός πίνακα που περιγράφει μια γραμμική απεικόνιση (ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα) και η χρήση των μεγεθών αυτών για τον υπολογισμό του αντίστροφου ενός πίνακα ή του μετασχηματισμού ενός πίνακα στην διαγώνια μορφή του όταν αυτό είναι εφικτό.
- η μελέτη χαρακτηριστικών μεγεθών της ειδικής κατηγορίας των ορθογώνιων πινάκων,
- η μελέτη τετραγωνικών μορφών και η σύνδεση τους με την περιγραφή κωνικών τομών.

**Διαβάζετε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.  
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

<sup>1</sup> Σύμφωνα με τον Κανονισμό Σπουδών, η καταληκτική ημερομηνία για την παραλαβή της Γ.Ε. από το μέλος ΣΕΠ είναι η επόμενη Τετάρτη από το τέλος της εβδομάδας παράδοσης Γ.Ε.

**Άσκηση 1** (Μον.20) Κάθε διανυσματικός χώρος  $\mathbf{R}^n$ , που θεωρούμε εδώ, είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Με  $u \bullet v$ , συμβολίζουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των  $u$  και  $v$  στον  $\mathbf{R}^n$ .

**α)** (Μον.3) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των στοιχείων  $(1,-2,3)^T$  και  $(1,-1,1)^T$  του  $\mathbf{R}^3$  και των στοιχείων  $(-2,3)^T$  και  $(-1,1)^T$  του  $\mathbf{R}^2$ .

**β)** (Μον.5) Να βρεθεί η τρίτη γραμμή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

αν αυτός είναι ορθογώνιος.

**γ)** (Μον.5) Έστω  $V$  ο υποχώρος του  $\mathbf{R}^4$  που παράγεται από τα στοιχεία  $u_1 = (1, -2, 2, 0)^T$ ,  $u_2 = (0, -1, 1, -1)^T$  και  $u_3 = (1, 2, -1, 5)^T$ . Να βρεθεί μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος  $V^\perp$ .

**δ)** (Μον.7) Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου  $W$  του  $\mathbf{R}^3$  που παράγεται από τα  $w_1 = (1, 1, 0)^T$  και  $w_2 = (2, 0, 1)^T$  και η ορθή προβολή του  $(1, 0, 0)^T$  επί του  $W$ .

< Χώρος για τη λύση της 1ης άσκησης >

## Άσκηση 2 (Μον.20)

α) Να εξεταστεί αν οι παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές

i) (Μον.2)  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , με  $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$  για κάθε  $x, y, z \in \mathbf{R}$ .

ii) (Μον.2)  $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , με  $g(x,y,z) = (x+y+z, 1, 0)$  για κάθε  $x, y, z \in \mathbf{R}$ .

iii) (Μον.2)  $h: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , με  $h(x,y,z) = (xy, z)$  για κάθε  $x, y, z \in \mathbf{R}$ .

β) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση  $\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  που πληροί τις συνθήκες

$$\varphi(0,1,1) = (0,1,3), \varphi(1,0,1) = (5,4,3) \text{ και } \varphi(1,1,0) = (2,0,0).$$

i) (Μον.5) Να βρεθεί ο τύπος της  $\varphi$ .

ii) (Μον.7) Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα αναπαράστασης της  $\varphi$  ως προς τη συνήθη (διατεταγμένη) βάση  $B$  του  $\mathbf{R}^3$ . Στη συνέχεια, να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του  $\text{Ker}\varphi$  και  $\text{Im}\varphi$ .

iii) (Μον.2) Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση  $\varphi$  είναι 1-1 και επί.

< Χώρος για τη λύση της 2ης άσκησης >

**Άσκηση 3.** (Μον.20) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

**α)** (Μον.3) Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$ . Να εξετάσετε βάση των όρων του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αν ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται.

**β)** (Μον.5) Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .

**γ)** (Μον.5) Να εφαρμόσετε το θεώρημα Cayley-Hamilton για τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα του  $A$ .

**δ)** (Μον.4) Να υπολογίσετε έναν πίνακα  $P$  ο οποίος έχει την ιδιότητα  $P^{-1}AP = D$  όπου ο πίνακας  $D$  είναι διαγώνιος.

**ε)** (Μον.3) Βασιζόμενοι στο ερώτημα (δ) υπολογίστε τον πίνακα  $A^{2016}$ .

< Χώρος για τη λύση της 3ης άσκησης >

#### Άσκηση 4 (Μονάδες 20)

Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$  και  $B = I_3 - 2AA^T$ .

**α)** (Μον.10) Να προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$ , τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα καθώς και μια βάση των αντίστοιχων ιδιοχώρων.

**β)** (Μον.10) Να προσδιοριστεί ο αριθμός  $\kappa \in \mathbf{R}$  έτσι, ώστε ο πίνακας  $B_\kappa = \kappa I_3 - 2AA^T$  να είναι θετικά ορισμένος.

< Χώρος για τη λύση της 3ης άσκησης >

**Άσκηση 5.** (Μον. 20) Δίνεται η τετραγωνική μορφή:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$$

**α)** (Μον.2) Βρείτε έναν συμμετρικό πίνακα  $A \in M_{2,2}(\mathbf{R})$  τέτοιον ώστε  $Q = x^T A x$  όπου

$$x = (x_1, x_2)^T.$$

**β)** (Μον.2) Είναι η παραπάνω τετραγωνική μορφή θετικά ορισμένη, αρνητικά ορισμένη ή αόριστη ;

**γ)** (Μον.8) Βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα  $P \in M_{2,2}(\mathbf{R})$  και έναν διαγώνιο πίνακα

$$D \in M_{2,2}(\mathbf{R}), \text{ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση } P^T A P = D.$$

**δ)** (Μον.8) Τι είδους κωνική τομή παριστάνει η εξίσωση  $Q(x_1, x_2) = 12$  ;

**< Χώρος για τη λύση της 5ης άσκησης >**