



Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», **καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση** και το υποβάλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την Γ.Ε και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης Γ.Ε όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge2_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής (ημέρα Τετάρτη)	16-12-2014 23:59μμ
Ακ. Έτος	2015-16	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	2	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

Ημερομηνία Ανάρτησης: 14 Νοεμβρίου 2015

Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής: 16 Δεκεμβρίου 2015 (καταληκτική)

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 2^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 3 (Χώροι εσωτερικού γινομένου)

Κεφάλαιο 4 (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)

Κεφάλαιο 5 (Χαρακτηριστικά μεγέθη και κανονικές μορφές γραμμικών απεικονίσεων)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: βοηθητικό υλικό
που υπάρχει στο: study.eap.gr

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό: Κεφ6 (Διανυσματικοί Χώροι), Κεφ7 (Βάσεις και Διάσταση), Κεφ8 (Γραμμικές Απεικονίσεις), Κεφ9 (Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα), Κεφ10 (Διαγωνοποίηση), Κεφ11 (Τετραγωνικές Μορφές).

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : από Γραμμική Άλγεβρα: Διανυσματικοί Χώροι, Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- η εξοικείωση με τις έννοιες της ορθογωνιότητας, της προβολής και του ορθογώνιου συμπληρώματος ενός υπόχωρου,
- η κατανόηση της διαδικασίας μετατροπής μιας μη ορθοκανονικής βάσης ενός Ευκλείδειου χώρου σε μια νέα βάση που είναι ορθοκανονική μέσω της μεθόδου Gram-Schmidt,
- η σύνδεση της έννοιας της ορθοκανονικής βάσης στον $\mathbf{R}^n$ με την έννοια του ορθογώνιου πίνακα που ανήκει στον χώρο των πινάκων $M_{n,n}(\mathbf{R})$,
- η κατανόηση της έννοιας της γραμμικής απεικόνισης και συνεπώς η ικανότητα ελέγχου αν μια απεικόνιση είναι γραμμική ή όχι,
- η κατανόηση ορισμών που συνδέονται με τις γραμμικές απεικονίσεις και μετασχηματισμούς όπως πυρήνας, εικόνα, πίνακας αναπαράστασης, βαθμός, μηδενικότητα, μονομορφισμός, επιμορφισμός, ισομορφισμός.
- η κατανόηση του τρόπου υπολογισμού χαρακτηριστικών μεγεθών μιας γραμμικής απεικόνισης αλλά και ενός πίνακα που περιγράφει μια γραμμική απεικόνιση (ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα) και η χρήση των μεγεθών αυτών για τον υπολογισμό του αντίστροφου ενός πίνακα ή του μετασχηματισμού ενός πίνακα στην διαγώνια μορφή του όταν αυτό είναι εφικτό.
- η μελέτη χαρακτηριστικών μεγεθών της ειδικής κατηγορίας των ορθογώνιων πινάκων,
- η μελέτη τετραγωνικών μορφών και η σύνδεση τους με την περιγραφή κωνικών τομών.

Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 1 (Μον. 20)

Το εσωτερικό γινόμενο κάθε χώρου $\mathbf{R}^n$ που θεωρούμε εδώ είναι το σύνηθες.

α) (μον. 3) Να βρεθούν οι γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων (του $\mathbf{R}^3$) $u_1=(1, 0, 1)$, $u_2=(0, 1, 1)$, $u_3=(1, 1, 0)$ ανά δύο.

β) (μον. 4) Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε το γινόμενο $A A^T$.

γ) (μον. 5) Δείξτε ότι το σύνολο $\{w_1=(1,-1,1,-1), w_2=(1,1,-1,-1), w_3=(1,-1,-1,1)\}$ είναι ορθογώνια βάση του υποχώρου $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ και βρείτε ορθοκανονική βάση του W .

δ) (μον. 8) Να βρεθεί η (ορθή) προβολή του διανύσματος $u=(\alpha, \beta, \gamma)$ του $\mathbf{R}^3$ στον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $u_1=(1, 2, 1)$, $u_2=(1, -1, 1)$.

<χώρος απαντήσεων άσκησης 1>

Άσκηση 2. (Μον. 20)**α)** Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, x + y - z, x + 3y + 3z, 3x + 4y - z).$$

- α₁)** (μον. 4) Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα αναπαράστασης της φ ως προς τις (διατ/μένες) βάσεις $B_1 = \{ (0,1,1), (0,0,1), (3, -2,1) \}$ του $\mathbf{R}^3$ και της συνήθους βάσης του $\mathbf{R}^4$.
- α₂)** (μον. 4) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση για κάθε ένα από τους υποχώρους $\text{Ker}\varphi$ και $\text{Im}\varphi$.
- α₃)** (μον. 2) Είναι η φ 1-1, είναι επί;

β) Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $\sigma: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ που προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

$$\sigma(1,2) = (2,1) \text{ και } \sigma(2,1) = (1,2).$$

- β₁)** (μον. 5) Να βρεθεί ο τύπος του σ και ναδειχθεί ότι το μέτρο της εικόνας $\sigma(x,y)$ ισούται με το μέτρο του (x,y) (το μέτρο που θεωρούμε προέρχεται από το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{R}^2$).
- β₂)** (μον. 5) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του σ , (διατεταγμένη) βάση ιδιοδιανυσμάτων αυτού και ο πίνακας αναπαράστασης του σ ως προς αυτή την βάση. Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία του σ ;

<χώρος απαντήσεων άσκησης 2 >

Άσκηση 3 (Μον. 20)

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3α) (8 μον.) Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A και δείξτε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

3β) (1 μον.) Βρείτε αντιστρέψιμο $P \in M_3(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

3γ) (5 μον.) Βρείτε $B \in M_3(\mathbb{R})$ με $B^3 = A$.

3δ) (6 μον.) Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 8z)$.

Αληθεύει ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε ο αντίστοιχος πίνακας της f είναι ο A ;

<χώρος απαντήσεων άσκησης 3 >

.

Άσκηση 4. (Μον.20)

α) (μον. 6) Έστω A 2×2 πίνακας με διπλή ιδιοτιμή λ . Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$,

$$A^n = n\lambda^{n-1}A - (n-1)\lambda^n I_2.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Cayley-Hamilton.

β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.

β₁) (μον. 2) Για ποιες τιμές του a υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_2(R)$ με $P^{-1}AP$ διαγώνιο;

β₂) (μον. 2) Για ποιες τιμές του a υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $Q \in M_2(R)$ με $Q^{-1}AQ$ διαγώνιο;

β₃) (μον. 5) Για $a=1$ να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας $Q \in M_2(R)$ με $Q^{-1}AQ$ διαγώνιο.

γ) (μον. 5) Να βρεθεί συμμετρικός πίνακας $B \in M_2(R)$ με ιδιοτιμές τις 1 και 5 και ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ για την ιδιοτιμή 1.

<χώρος απαντήσεων άσκησης 4 >

Άσκηση 5. (Μον. 20)

α) (12 μον.) Προσδιορίστε ποιοί από τους πίνακες:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad B(\beta) = \begin{pmatrix} \beta & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

με α, β πραγματικούς αριθμούς και θ στο διάστημα $[0, \pi]$, είναι θετικά ορισμένοι. Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές των αντίστοιχων παραμέτρων, όπου υπάρχουν.

β) (8 μον.) Δίνεται η τετραγωνική μορφή: $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 11x_2^2$.

Τι είδους κωνική τομή παριστάνει η εξίσωση $Q(x_1, x_2) = 6$ στο x_1x_2 -επίπεδο; Προσδιορίστε τα μήκη των ημιαξόνων και τους άξονες συμμετρίας της κωνικής τομής (το σύστημα αξόνων $x_1'Ox_1, x_2'Ox_2$ θεωρείται ορθοκανονικό).

Υπόδειξη: Δίνεται ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$ δέχεται ως ιδιοδιανύσματα τα $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<χώρος απαντήσεων άσκησης 5>