



Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την Γ.Ε και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης Γ.Ε όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge1_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)	
--	--

Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	11/11/2015 23:59μμ
Ακ. Έτος	2015-16	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	1	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Φοιτητή

Υπογραφή

Καθηγητή-Συμβούλου



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

Ημερομηνία Ανάρτησης:

8 Οκτωβρίου 2015

Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής: 11 Νοεμβρίου 2015 (καταληκτική)

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 1^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 1 (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα)

Κεφάλαιο 2 (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάσταση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα μελετήσετε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** (study.eap.gr) ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό :

Σύνολα Αριθμών,
Συναρτήσεις,
Πίνακες,
Οι Χώροι R^n ,
Διανυσματικοί Χώροι.

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό:

Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες,
Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα,
Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα,
Κεφ4 Ορίζουσες,
Κεφ5 Οι χώροι R^n ,
Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι ,
Κεφ7 Βάση και Διάσταση.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

να σας εξοικειώσει με τις πράξεις πινάκων, την εύρεση κλιμακωτής μορφής πίνακα, τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα (είτε μέσω ιδιοτήτων ορίζουσών είτε με την μέθοδο Laplace), τα κριτήρια αντιστρεψιμότητας πίνακα και τον υπολογισμό του αντίστροφου (σε περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος), καθώς και την επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο (απαλοιφής) Gauss,

να σας βοηθήσει στην κατανόηση της δομής ενός διανυσματικού χώρου, του ελέγχου πότε ένα υποσύνολό του αποτελεί ή όχι διανυσματικό υπόχωρο του ελέγχου γραμμικής ανεξαρτησίας και εξάρτησης διανυσμάτων, συνόλων γεννητόρων και βάσεων.

**Διαβάστε προσεκτικά την πλήρη εκφώνηση κάθε άσκησης.
Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

Άσκηση 1 (Μον. 20)

α) (μον.6) Δίνονται οι πίνακες 1×3 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ με x πραγματικό αριθμό.

α₁) Να υπολογιστούν, αν ορίζονται, οι πίνακες A^2 , $A^T A$, $B^T B$, $AA^T + A^T A$.

α₂) Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ο πίνακας AB^T είναι μηδενικός και για αυτή την τιμή του x να υπολογιστεί το γινόμενο $(A^T A)(B^T B)$.

β) (μον.2) Αν $A \in M_{nn}(R)$ είναι κανονικός πίνακας (δηλαδή $AA^T = A^T A$) δείξτε ότι και ο $B = A + I_n$ είναι κανονικός.

γ) (μον.4) Αν $A \in M_{nn}(R)$ με $A^2 = A + I_n$, δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και εκφράστε τον A^{-1} και τον A^3 ως $\kappa I_n + \lambda A$ με κατάλληλους συντελεστές κ και λ .

δ) (μον.8) Για κάθε μία από τις ορίζουσες $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$, να βρεθούν όλες οι

πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η αντίστοιχη ορίζουσα μηδενίζεται.

< Χώρος για την λύση της 1ης άσκησης >

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 10) Δίδονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A και να λύσετε τα γραμμικά συστήματα $AX=b_k$, $k=1, 2, 3$.

β) (μον. 10) Να βρεθούν όλες οι τιμές του α για τις οποίες οι παρακάτω πίνακες είναι γραμμοϊσοδύναμοι.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 4 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

< Χώρος για την λύση της 2ης άσκησης >

Άσκηση 3 (Μον. 20)

Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί.

α) (μον. 8) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο απαλοιφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα α, β, γ ώστε το σύστημα $AX = B$ να έχει λύση.

β) (μον.12) Είναι το σύστημα $(A^T A)X = A^T B$ πάντα συμβιβαστό;

< Χώρος για την λύση της 3ης άσκησης >

Άσκηση 4. (Μον.20)

α) (10 μον.) Θεωρούμε τους υπόχωρους V, W του $\mathbb{R}^3$ που ορίζονται ως εξής :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y + z = 0\} \text{ και } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}.$$

α₁) Να βρείτε βάση της τομής των υποχώρων $W \cap V$, βάση του V και βάση του W .

α₂) Ισχύει ότι ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι το ευθύ άθροισμα των V και W ;

β) (10 μον.) Θεωρούμε τον υπόχωρο U_1 του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,1,0)$ και $(1,2,1,3)$ και τον υπόχωρο U_2 που παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,1,1)$ και $(2,0,2,1)$.

Να βρεθεί βάση και διάσταση για κάθε ένα από τους υποχώρους $U_1, U_2, U_1 + U_2$.

< Χώρος για την λύση της 4ης άσκησης >

Άσκηση 5. (Μον. 20)

α) (μον. 2+3) Για κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα να εξετάσετε αν αποτελούν υπόχωρο και να δώσετε βάση και διάσταση στην περίπτωση που είναι:

i) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x + 1\}$, υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^2$,

ii) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, υποσύνολο του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$.

β) (μον. 7) Δείξτε ότι το σύνολο $S = \{(x+1)^2, x+1, 1\}$ είναι βάση του χώρου των πολωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 2 ως προς x και γράψτε το πολώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ ως γραμμικό συνδυασμό της S .

γ) (μον. 8) Εξετάστε την γραμμική ανεξαρτησία του συνόλου $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ που είναι υποσύνολο του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$, χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των στοιχείων του στην συνήθη διατεταγμένη βάση του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$, $B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Σε περίπτωση που το σύνολο A δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο να βρεθεί μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του ίσος προς το μηδενικό στοιχείο του χώρου $M_{22}(\mathbb{R})$.

< Χώρος για την λύση της 5ης άσκησης >