



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 17 Ιουνίου 2017, 13:30 - 17:00

Διαβάστε προσεκτικά και αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας σε όλα τα 5 θέματα
Καλή Επιτυχία

Θέμα 1

1α) (8 μονάδες) Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$2x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 2$$

$$3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 18$$

$$x_1 - x_2 + ax_3 = 3$$

όπου a πραγματική παράμετρος. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss να υπολογιστεί η παράμετρος a ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο και στη συνέχεια να βρεθεί η λύση του συστήματος για την τιμή της παραμέτρου $a = -7$.

1β) (6 μονάδες) Θεωρούμε τα διανύσματα $u = (1, 2, 6)$, $v = (1, 3, -1)$, $w = (1, -1, a)$, όπου a πραγματική παράμετρος. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου a για τις οποίες τα διανύσματα u, v, w αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και για τις τιμές αυτές της παραμέτρου a να εκφραστεί το διάνυσμα $(2, 18, 3)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων u, v, w .

1γ) (2 μονάδες) Ναδειχτεί ότι το υποσύνολο $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 5\}$ του χώρου $\mathbb{R}^2$ δεν αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

1δ) (4 μονάδες) Ναδειχτεί ότι το υποσύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί μια βάσης του.

Θέμα 2

2α) (10 μονάδες) Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1, 0, 0) = (1, -1), \quad f(0, 1, 0) = (0, 1), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 1).$$

i) (4 μονάδες) Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος της γραμμικής απεικόνισης f .

ii) (5 μονάδες) Να βρεθούν βάση και διάσταση για τον πυρήνα $\text{Ker } f$ και την εικόνα $\text{Im } f$ της f .

iii) (1 μονάδα) Να ελεγχθεί αν η f είναι: α) 1-1, β) επί και γ) αντιστρέψιμη.

2β) (10 μονάδες) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε

ο πίνακας $P^T A P$ να είναι διαγώνιος.

Θέμα 3

3α) (4 μονάδες) Να υπολογισθούν τα όρια: i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + \cos n}{3n^2 - n}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1}{x^2}$.

3β) (2 μονάδες) Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^4}$.

3α) (5 μονάδες) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)4^n}$ (να εξεταστεί η σύγκλιση και στα άκρα του διαστήματος).

3β) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης να δοθεί (επεκτείνοντας κατάλληλα όπου αυτό απαιτείται) η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^{2x^2} - e^{-2x^2}}{2x^2}$ και να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

3ε) (4 μονάδες) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle να δείχθεί ότι η εξίσωση $x^4 = 2x^3 - 30x^2 + x + 2$ έχει το πολύ δύο διακριτές (απλές) πραγματικές ρίζες.

Θέμα 4

4α) (10 μονάδες) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{-x}$, ορισμένη στον $\mathbb{R}$.

i) (5 μονάδες) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι: α) αύξουσα, β) φθίνουσα, γ) στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (κυρτή) και δ) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη).

ii) (2 μονάδες) Να βρεθούν όλα τα σημεία: α) μηδενισμού στους άξονες, β) ακρότατων τιμών (τοπικών, ολικών) και γ) καμπής της f .

iii) (3 μονάδες) Να διερευνηθεί η ύπαρξης ασύμπτωτων ευθειών και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

4β) (5 μονάδες) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κλειστού (φραγμένου) χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 e^{-x}$, $g(x) = 4e^{-x}$, του άξονα yy' και της ευθείας $x = 3$.

4γ) (5 μονάδες) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \ln(2x) dx$ και να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^e x \ln(2x) dx$ συγκλίνει.

Θέμα 5

5α) (10 μονάδες) Σε μια διαγνωστική εξέταση το αποτέλεσμα είναι θετικό με πιθανότητα 0.95 σε έναν ασθενή που πάσχει από την ασθένεια και είναι θετικό με πιθανότητα 0.10 σε ένα υγιές άτομο. Υπολογίζεται ότι 0.5% του πληθυσμού έχει αυτήν την ασθένεια. Για ένα άτομο υπολογίστε τις παρακάτω πιθανότητες:

i) (2 μονάδες) Το αποτέλεσμα να είναι θετικό.

ii) (2 μονάδες) Αν το αποτέλεσμα είναι θετικό, τότε το άτομο πάσχει πράγματι από την ασθένεια.

iii) (2 μονάδες) Αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, τότε το άτομο είναι υγιές.

iv) (2 μονάδες) Να έχει δοθεί στον ασθενή λάθος διάγνωση.

v) (2 μονάδες) Στους 10 ασθενείς να έχει δοθεί το πολύ μία λάθος διάγνωση.

(Δεν απαιτείται να ολοκληρώσετε τις πράξεις σας).

Υπόδειξη: Συμβολίζουμε με T το τεστ είναι θετικό, με A τον ασθενή και με Y τον υγιή.

5β) (μον. 10) Δύο αθλητές A και B επιλέχθηκαν από τις χώρες τους να τις εκπροσωπήσουν στους Ολυμπιακούς αγώνες στο αγώνισμα της δισκοβολίας. Η απόσταση που ρίχνει το δίσκο κάθε αθλητής ακολουθεί την κανονική κατανομή. Η μέση απόσταση στην οποία έριχνε το δίσκο ο αθλητής A την προηγούμενη χρονιά είναι 62 μέτρα με τυπική απόκλιση 1 μέτρο.

i) (3 μονάδες) Την προηγούμενη χρονιά το 84% των βολών του A ήταν μεγαλύτερες από ω μέτρα. Να βρεθεί η τιμή του ω .

ii) (3 μονάδες) Την προηγούμενη χρονιά το 50% των βολών του αθλητή B ήταν κάτω από 63 μέτρα, ενώ το 16% των βολών του ήταν πάνω από 66 μέτρα. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των βολών του αθλητή B .

Υποθέτουμε ότι τη φετινή χρονιά οι αθλητές διατηρούν τις ίδιες επιδόσεις. Σε κάποιο διαγωνισμό στον 1^ο γύρο οι αθλητές ρίχνουν τρεις βολές και πρέπει να έχουν τουλάχιστον μία βολή πάνω από τα 60 μέτρα για να περάσουν στον 2^ο γύρο.

iii) (3 μονάδες) Να προσδιοριστεί ποιος από τους δύο αθλητές είναι πιθανότερο να προκριθεί στον 2^ο γύρο.

iv) (1 μονάδα) Να βρεθεί η πιθανότητα και οι δύο αθλητές να προκριθούν στον 2^ο γύρο.

Υπόδειξη: Προαιρετικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως τιμές της αθροιστικής συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής τις: $\Phi(1) = 0.84$ και $\Phi(2) = 0.975$