



Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο **παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση** και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφο της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση. Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 3η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge3_pli12.doc**».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική διεύθυνση)	
--	--

Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (ημέρα Τετάρτη)	03/02/2016 23:59μμ
Ακ. Έτος	2015 -16	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	3	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Ημερομηνία Ανάρτησης: 5 Ιανουαρίου 2016

Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής: 3 Φεβρουαρίου 2016 (**καταληκτική**)

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση κάθε άσκησης να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3^{ης} εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 2 (2.1 πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής)

Ενότητα 4 (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)

Ενότητα 5 (Παράγωγος)

Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)

Ενότητα 7 (Ακρότατα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής και για την εκπόνηση της εργασίας θα μελετήσετε επίσης το: **Βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο φάκελο [ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ](#) στο study.eap.gr ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : **Λογισμός**

Σύνολα Αριθμών,

Συναρτήσεις,

Ορια-Συνέχεια,

Παράγωγοι,

Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού.

όπως και παλαιότερες γραπτές εργασίες και σημειώσεις των ομαδικών συμβουλευτικών συναντήσεων.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση

- της έννοιας της πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής,
- της έννοιας του ορίου και συνέχειας συναρτήσεων και των σχετικών ιδιοτήτων,
- της παραγώγου (πρώτης και ανώτερης τάξης),
- των κανόνων παραγωγής,
- των θεωρημάτων του διαφορικού λογισμού και
- των εφαρμογών αυτών στον υπολογισμό ορίων, στην εύρεση ακροτάτων τιμών, στην μελέτη συνάρτησης και στην απόδειξη ανισοτικών σχέσεων μεταξύ συναρτήσεων.

Αιτιολογήστε προσεκτικά ΟΛΕΣ τις απαντήσεις σας

Άσκηση 1 (Μον. 20)

A) (μον. 10) Να βρεθούν όλες οι τιμές των α, β, γ στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + \beta, & x < 1 \\ x^2 + \gamma x, & x \geq 1 \end{cases},$$

είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και να δοθεί ο τύπος της φ' . Πού είναι η φ' παραγωγίσιμη;

Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι η φ ορίζεται μέσω πολυωνυμικών (άρα και παραγωγισίμων) συναρτήσεων περιορισμένων σε αντίστοιχα διαστήματα.

B) (μον. 10) Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της 1^{ης} παραγώγου (εκεί όπου η 1^η παράγωγος ορίζεται):

i) $f(x) = (x \ln x)^{-1}$, **ii)** $g(x) = x e^{-x}$, **iii)** $h(x) = (1-x)^{-1}$,

< χώρος απαντήσεων άσκησης 1 >

Άσκηση 2. (Μον. 20)

A) (μον. 9) Δώστε τον τύπο της γραμμικής προσέγγισης της συνάρτησης $(1+x)^k$ (k τυχόν πραγματικός αριθμός) για x γύρω από το 0, με την βοήθεια της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημά της στο σημείο (0,1) και, στην συνέχεια, κάνετε χρήση αυτού του τύπου για να βρείτε προσεγγίσεις (για x γύρω από το 0) για τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $g(x) = \frac{1}{1+x}$, **ii)** $h(x) = \sqrt[3]{1+5x^4}$.

B) Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο αντίστοιχο διάστημα:

i) (μον. 4) $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$, στο διάστημα $[-1/2, 3/4]$,

ii) (μον. 3) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 13x$, στο διάστημα $[1, 3]$,

iii) (μον. 4) $g(x) = xe^{-x\ln 2}$, στο διάστημα $[1, 4]$.

< χώρος απαντήσεων άσκησης 2 >

Άσκηση 3 (Μον. 20)

A) (μον. 5) Δείξτε ότι $e^x \geq 1 + x + x^2/2$ για κάθε $x \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

B) (μον. 5) Δείξτε ότι $|\sin a - \sin b| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|a - b|$ για κάθε a, b στο διάστημα $[\pi/4, 3\pi/4]$.

Γ) (μον. 4) Εστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση έτσι ώστε $g'(x) = xg(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Δείξτε ότι υπάρχει κ (πραγματικός αριθμός) ώστε $g(x) = \kappa e^{x^2/2}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Δ) Ισχύει ότι: αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε διάστημα Δ , τότε $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ για κάθε x_1, x_2 στο Δ . Εφαρμόστε την προηγούμενη πρόταση για να δείξετε ότι:

i) (μον.3) $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ για x_1, x_2 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(Υπόδειξη: δείξτε πρώτα ότι $\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2)}{2}$ για x_1, x_2 στο $(0, +\infty)$).

ii) (μον. 3) $(x_1 + x_2)^3 \leq 4(x_1^3 + x_2^3)$, για x_1, x_2 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

< χώρος απαντήσεων άσκησης 3 >

Άσκηση 4. (Μον.20)

A) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\textbf{i)} \text{ (μον. 2)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \ln(x)}{1 + x^2 \ln(x)}, \quad \textbf{ii)} \text{ (μον.2)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \cos(x)}{\sin(x) + x},$$

B) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\textbf{i)} \text{ (μον. 3)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x}, \quad \textbf{ii)} \text{ (μον. 4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2},$$

Γ) Να υπολογίσετε τα όρια για τις διάφορες τιμές της **θετικής** παραμέτρου α :

$$\textbf{i)} \text{ (μον. 4)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x^\alpha}, \quad \textbf{ii)} \text{ (μον. 5)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)^\alpha - x^\alpha \right).$$

< **χώρος απαντήσεων άσκησης 4** >

Άσκηση 5. (Μον. 20)

A) Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ με $f(x) = \ln(1+x^2)$.

i) (μον. 3) Αφού υπολογιστεί η f' , να προσδιοριστεί η μονοτονία της f και να βρεθούν τοπικά ακρότατα (αν υπάρχουν).

ii) (μον.3) Αφού υπολογιστεί η f'' , να βρεθεί σε ποιά διαστήματα η γραφική παράσταση της f είναι κυρτή, πού είναι κοίλη και να βρεθούν, αν υπάρχουν, σημεία καμπής της f .

iii) (μον. 2) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$ και να δοθεί η γραφική παράσταση της f μαζί με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $2\ln(x)$.

iv) (μον. 2) Να βρεθεί το σύνολο $T = f([0, +\infty))$ (σύνολο τιμών της f) και, αν υπάρχει, συνάρτηση $g: T \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(f(x)) = x$ για κάθε x στο $[0, +\infty)$.

B) Αφού προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού κάθε μιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες στις γραφικές παραστάσεις αυτών:

i) (μον. 2) $\frac{e^{-x} - 2xe^{2x}}{e^{2x} + 3e^{-x}}$, **ii)** (μον. 3) $(\ln x)^{-1}$, **iii)** (μον. 5) $x \tan^{-1}(x)$.

Σημείωση: $\tan^{-1}(x) = \text{Arctan}(x)$.

< Χώρος απαντήσεων άσκησης 5 >