



Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΔΕΟ13 θα πρέπει να γραφεί: «*ioannou_ge2_deo13.doc*».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή			
Κωδικός ΘΕ	ΦΥΕ20	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή –Σύμβουλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο	Τετάρτη 16/12/2015
Ακ. Έτος	2015-16	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	2 ^η	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικά, ολογράφως)	

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

Παρατηρήσεις



Γενικά Μαθηματικά II – ΦΥΕ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2015-2016

2^η Γραπτή Εργασία

Η εργασία πρέπει να σταλεί στον Σύμβουλο Καθηγητή σας αναρτώντας την στη διεύθυνση <http://study.eap.gr> μέχρι την Τετάρτη **16/12/2015**.

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής που βρίσκεται στη πρώτη σελίδα αυτού του αρχείου.
2. Η εργασία σας μπορεί να γραφεί ηλεκτρονικά ή χειρόγραφα. Οι χειρόγραφες εργασίες αφού σκαναριστούν αποστέλλονται στον Καθηγητή σας σε μορφή ενιαίου αρχείου Doc ή Pdf.
3. Η 2^η γραπτή εργασία περιλαμβάνει 8 ασκήσεις (1-8) στις οποίες πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.
4. Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε τη μελέτη της θεωρίας και των παραδειγμάτων του βιβλίου σας (Τόμος Α': Γραμμική Άλγεβρα) καθώς και την επίλυση ασκήσεων από το εναλλακτικό διδακτικό υλικό σας (1 CD και 1 DVD). Επίσης θα πρέπει να μελετήσετε τις αντίστοιχες γραπτές εργασίες και τα θέματα των εξετάσεων των προηγούμενων ετών. Το έντυπο και εναλλακτικό διδακτικό υλικό σας έχει αποσταλεί από το ΕΑΠ ενώ τις γραπτές εργασίες και τα θέματα των εξετάσεων προηγούμενων ετών θα τις βρείτε (με χρήση των κωδικών σας) στη διεύθυνση <http://study.eap.gr> ακολουθώντας το menu ΦΥΕ20 - Γενικά Μαθηματικά II > Συμπληρωματικό Υλικό.

Στις επόμενες σελίδες θα βρείτε τις εκφωνήσεις των 8 ασκήσεων της εργασίας καθώς και τις μονάδες βαθμολόγησης της κάθε άσκησης. Το άριστα για το σύνολο της εργασίας είναι οι 100 μονάδες.

Καλή Επιτυχία.



Πρόγραμμα: Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες

13 Νοεμβρίου 2015

Θεματική Ενότητα: Γενικά Μαθηματικά II

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 16 Δεκεμβρίου 2015

2η Γραπτή Εργασία

Άσκηση 1. (10 μονάδες)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο (βλ. σελ. 146). Έστω $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$ και $V = \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

- i) Βρείτε την προβολή του διανύσματος $\mathbf{w}$ πάνω στον υπόχωρο V .
- ii) Βρείτε δύο διανύσματα $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$ του $\mathbb{R}^3$ για τα οποία να ισχύουν συγχρόνως:

$$\alpha) \mathbf{w} \in V, \quad \beta) \mathbf{w}' \in V^\perp \quad \text{και} \quad \gamma) \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'.$$

Είναι αυτά τα διανύσματα μοναδικά; (πλήρη αιτιολόγηση)

- iii) Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $A(1, 0, 1)$ από τον υπόχωρο V .

Άσκηση 2. (10 μονάδες)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο (βλ. σελ. 146). Έστω $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$ και $V = \{ \mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ και } -x + y + z = 0 \}$.

- i) Δείξτε ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Τι παριστάνει γεωμετρικά ο V ;
- ii) Βρείτε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ για τον οποίο να ισχύει $V = W^\perp$ και ερμηνεύστε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. Είναι ο W μοναδικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $V = W^\perp$; (πλήρη αιτιολόγηση)

Άσκηση 3. (15 μονάδες)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο (βλ. σελ. 146). Έστω $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$ και $V = \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

- i) Βρείτε μία ορθοκανονική βάση S του V .
- ii) Επεκτείνετε τη βάση S του V που βρήκατε στο i) σε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Είναι αυτή η επέκταση μοναδική; (πλήρη αιτιολόγηση)

Άσκηση 4. (15 μονάδες)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο (βλ. σελ. 146). Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

- i) Να δείξετε ότι το σύνολο $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.
- ii) Αν $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που εκφράζει τη στροφή στο επίπεδο γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ (βλ. το Παράδειγμα 5 στις σελ. 209-210), τότε να βρείτε μία ορθοκανονική βάση $S' = \{\mathbf{w}, \mathbf{n}\}$ του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $R_{\frac{\pi}{4}}(\mathbf{w}) = \mathbf{u}$ και $R_{\frac{\pi}{4}}(\mathbf{n}) = \mathbf{v}$. Ποιος είναι ο πίνακας αναπαράστασης $\left[R_{\frac{\pi}{4}}\right]_{S', S}$ του $R_{\frac{\pi}{4}}$ ως προς τις βάσεις S', S ; (βλ. σχετικά τη σελ. 205 από την 4^η γραμμή έως και τις δύο επόμενες γραμμές της σχέσης (2))

Άσκηση 5. (10 μονάδες)

Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμικός μετασχηματισμός με

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(βλ. σχετικά τη σελ. 208 – από την 5^η γραμμή μέχρι και την επόμενη γραμμή της σχέσης (7)).

- i) Βρείτε τον τύπο του f ως προς τη βάση E του $\mathbb{R}^3$.
- ii) Βρείτε μία βάση του $\text{Ker } f$ (βλ. παράγραφο 4.3 στη σελ. 212). Είναι ο f «1-1» (βλ. Ορισμό 4.1.2 σελ. 198); (πλήρη αιτιολόγηση)

Άσκηση 6. (10 μονάδες)

Έστω $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $E' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα και $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με τύπο $f(x, y) = (x - y, x + y, 2x - 3y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τον πίνακα αναπαράστασης $[f]_{E, E'}$ της f ως προς τις βάσεις E , E' (βλ. σελ. 205 από την 4^η γραμμή μέχρι και τις δύο επόμενες γραμμές της σχέσης (2)).
- ii) Να βρείτε μία βάση του $\text{Im } f$ (βλ. παράγραφο 4.3 στη σελ. 212). Είναι η f επί (βλ. Ορισμό 4.1.3 σελ. 199); (πλήρη αιτιολόγηση)

- iii) Βρείτε τη $\dim \text{Ker} f$ και δείξτε ότι η f είναι «1-1» (βλ. Ορισμό 4.1.2 σελ. 198). Είναι η f ισομορφισμός (βλ. σελ. 201); (πλήρη αιτιολόγηση)

Άσκηση 7. (15 μονάδες)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο (βλ. σελ. 146). Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ με $[\mathbf{v}]_E = [1 \ 1 \ -1]^T$

και $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με $[f]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(βλ. τη σελ. 208 από την 5^η γραμμή μέχρι και την επόμενη της σχέσης (7)).

- i) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}$ είναι γεννήτορας του $\text{Ker} f$.
- ii) Βρείτε δύο διανύσματα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$ τέτοια ώστε το σύνολο $S = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ να αποτελεί βάση του $(\text{Ker} f)^\perp$ (βλ. τη σελ. 212 της παραγράφου 4.3 για τον ορισμό του $\text{Ker} f$ και τη σελ. 161 για τον ορισμό του ορθογώνιου συμπληρώματος).
- iii) Έστω $S' = \{\mathbf{v}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$.
- α) Δείξτε ότι το S' αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.
- β) Βρείτε το $[f(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)]_{S'}$.

Άσκηση 8. (15 μονάδες)

Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την ευθεία του $\mathbb{R}^2$ (ε): $y = x$ και την απεικόνιση $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ το στέλνει σε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ με το εξής σκεπτικό: Στρέφουμε πρώτα το $\mathbf{u}$ κατά γωνία 30° γύρω από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια για το διάνυσμα που προέκυψε παίρνουμε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία (ε).

- i) Δείξτε ότι η F είναι σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων (και άρα είναι γραμμική απεικόνιση – βλ. Θεώρημα 4.1.2γ) σελ. 200) και στη συνέχεια βρείτε τον πίνακα $[F]_E$ αναπαράστασης της F ως προς τη βάση E (βλ. σχετικά τη σελ. 208 από την 5^η γραμμή μέχρι και την επόμενη από τη σχέση (7) γραμμή).
- ii) Δείξτε ότι η F αντιστρέφεται και βρείτε τον τύπο της F^{-1} ως προς τη βάση E .