

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας», καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο παρόν αρχείο κάτω από την αντίστοιχη εκφώνηση και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφο του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας», την υποβάλλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφα της υποβληθείσας όσο και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΦΥΕ20 πρέπει να γραφεί: «[ioannou_ge1_fye20.doc](#)».

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονομ/νυμο, τηλέφωνο, ηλεκ/νική, διεύθυνση)			
Κωδικός Θ.Ε.	ΦΥΕ 20	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή -Συμβούλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής	7-11-2018 Τετάρτη
Ακ. Έτος	2018-19	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α Γ.Ε.	1	Επισυνάπτεται (σε περίπτωση που έχει ζητηθεί) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (αριθμητικώς, ολογράφως)	

Υπογραφή

Υπογραφή

Φοιτητή

Καθηγητή-Συμβούλου

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Γενικά Μαθηματικά II – ΦΥΕ 20 Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019 1^η Γραπτή Εργασία

Ημερομηνία Ανάρτησης:

3-10-2018

Καταληκτική Ημερομηνία Υποβολής: 7-11-2018, ώρα 23:59 (καταληκτική)

Η πρώτη γραπτή εργασία πρέπει να σταλεί στον Σύμβουλο Καθηγητή σας αναρτώντας την στη διεύθυνση <http://study.eap.gr>

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής που βρίσκεται στη πρώτη σελίδα αυτού του αρχείου.
2. Η εργασία σας μπορεί να γραφεί ηλεκτρονικά και σε ειδικές περιπτώσεις χειρόγραφα. Οι εργασίες σας θα πρέπει οπωσδήποτε να αποστέλλονται στον Καθηγητή σας σε μορφή ενιαίου αρχείου Pdf.
3. Η 1^η Γραπτή Εργασία περιλαμβάνει έξι ασκήσεις στις οποίες πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.
4. Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε τη μελέτη της θεωρίας και των παραδειγμάτων του βιβλίου σας (Τόμος Α': Γραμμική Άλγεβρα) καθώς και την επίλυση των ασκήσεων από το εναλλακτικό διδακτικό υλικό σας (στην ηλεκτρονική διεύθυνση <https://apothesis.eap.gr/handle/repo/11535>).
5. Επίσης θα πρέπει να μελετήσετε τις αντίστοιχες γραπτές εργασίες και τα θέματα των εξετάσεων των προηγούμενων ετών. Το έντυπο διδακτικό υλικό σας έχει αποσταλεί από το ΕΑΠ ενώ τι ΕΔΥ, τις γραπτές εργασίες και τα θέματα των εξετάσεων θα τις βρείτε (με την χρήση των κωδικών σας, στη διεύθυνση <https://apothesis.eap.gr/handle/repo/11535> και στη διεύθυνση <http://study.eap.gr> ακολουθώντας το menu ΦΥΕ20 – Γενικά Μαθηματικά II > Συμπληρωματικό Υλικό.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι:

- να σας εξοικειώσει με τις πράξεις πινάκων, την εύρεση της κλιμακωτής και της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής πίνακα, τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα (είτε μέσω ιδιοτήτων ορίζουσών είτε με την μέθοδο Laplace), τα κριτήρια αντιστρεψιμότητας πίνακα και τον υπολογισμό του αντίστροφου (σε περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος), καθώς και την επίλυση γραμμικών συστημάτων ιδιαίτερα με τη μέθοδο Gauss,
- να σας βοηθήσει στην κατανόηση της δομής ενός διανυσματικού χώρου, του ελέγχου πότε ένα υποσύνολό του αποτελεί ή όχι διανυσματικό υποχώρο καθώς και του ελέγχου γραμμικής ανεξαρτησίας και εξάρτησης διανυσμάτων.
- να σας δείξει με απλά παραδείγματα μερικές εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας.

Οι ασκήσεις της 1^{ης} εργασίας αναφέρονται στα :

Κεφάλαιο 1 (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα)

Κεφάλαιο 2 (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και Διάσταση)

του συγγραμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Στις σελίδες που ακολουθούν θα βρείτε τις εκφωνήσεις των Ασκήσεων της 1^{ης} Γραπτής Εργασίας καθώς και τις μονάδες βαθμολόγησης της κάθε άσκησης. Το άριστα για το σύνολο της εργασίας είναι οι 100 μονάδες.

Καλή επιτυχία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

1^η Γραπτή Εργασία

Πρόγραμμα: Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες

Θεματική Ενότητα : Γενικά Μαθηματικά II

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης : 7-11-2018 (Τετάρτη, ώρα 23:59)

Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε άσκησης. Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
Γράψτε τις λύσεις κάτω από τις εκφωνήσεις των Ασκήσεων.

Άσκηση 1^η (15 μονάδες)

(α) Δίνονται οι 1×3 πίνακες, $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α.1) (3μονάδες) Να υπολογιστούν αν ορίζονται οι πίνακες A^2 , $A^T A$, $B^T B$, $AA^T + A^T A$ και $A^T A + B^T B$.

(α.2) (2μονάδες) Να υπολογιστεί η τιμή του $x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η ισότητα των πινάκων

$$A^T A + B^T B = 8C, \text{ όπου } C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

(α.3) (2μονάδες) Να υπολογιστεί η τιμή του $x \in \mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας AB^T είναι μηδενικός και στη συνέχεια για αυτή την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ να υπολογιστεί το γινόμενο $(A^T A)(B^T B)$, χωρίς να γίνει χρήση των υπολογισμών των πινάκων $A^T A$ και $B^T B$.

(β) (3μονάδες) Αν $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ είναι ένας κανονικός πίνακας (δηλαδή, $AA^T = A^T A$), δείξτε ότι και ο πίνακας $B = A + I_n$ είναι κανονικός.

(γ) (2μονάδες) Αν $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ με $2AB^5 + 5A + 3I_n = (0)$ (μηδενικός πίνακας), να δείξετε ότι ο πίνακας A αντιστρέφεται και στη συνέχεια να εκφράσετε τον A^{-1} ως $A^{-1} = \kappa I_n + \lambda B^5$, με κατάλληλους συντελεστές κ και λ .

(δ) (3μονάδες) Δίνονται οι πίνακες $X, A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$, $C \in M_{mm}(\mathbb{R})$, με A συμμετρικό και C αντιστρέψιμο συμμετρικό πίνακα. Δείξτε ότι αν ο πίνακας X είναι λύση της εξίσωσης

$$A - XBC^{-1}B^T X = (0),$$

τότε και ο πίνακας X^T είναι επίσης λύση της.

(Υπόδειξη : Να γίνει χρήση των ιδιοτήτων των πινάκων &1.1, &1.2, &1.3 του βιβλίου Τόμος Α': Γραμμική Άλγεβρα, Γ. Καμβύσα, Μ. Χατζηνικολάου. Στο ερώτημα (δ) θεωρείστε τον ανάστροφο των δύο μελών της εξίσωσης).

Λύση

Άσκηση 2^η (15 μονάδες)

(α) (4 μονάδες) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής να αποδειχθεί ότι

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -3^n + 3 & -3^n + 1 \\ 3^{n+1} - 3 & 3^{n+1} - 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

(β) (7 μονάδες) Υπολογίστε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ να είναι

αντιστρέψιμος. Για τις τιμές αυτές του $x \in \mathbb{R}$ υπολογίστε τον πίνακα A^{-1} , με την χρήση του προσαρμοσμένου πίνακα $\text{adj}(A)$.

(γ) (4 μονάδες) Δίνεται ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Υπολογίστε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα AA^T (δηλαδή, τα στοιχεία του AA^T στις θέσεις $(1,1), (2,2), \dots, (n,n)$). Στη συνέχεια δείξτε ότι αν $AA^T = (\mathbf{0})$, τότε $A = (\mathbf{0})$.

(Υπόδειξη : Στο ερώτημα (β) να γίνει χρήση της μεθόδου υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα με την βοήθεια του προσαρμοσμένου πίνακα, σελ. 31 του βιβλίου Τόμος Α': Γραμμική Άλγεβρα, Γ. Καμβύσα, Μ. Χατζηνικολάου).

Λύση

Άσκηση 3^η (10 μονάδες)

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 9 & 8 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(α) (6 μονάδες) Να υπολογιστεί ο A^{-1} ακολουθώντας την μέθοδο της Ανηγμένης Κλιμακωτής Μορφής (ΑΚΜ) του επανζημένου πίνακα $(A|I)$.

(β)(4 μονάδες) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + 3z + w = 2 \\ x + y + 5z + 5w = 3 \\ 2x + y + 9z + 8w = 4 \\ 2x + 6z + 3w = 5 \end{cases}$$
 χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του

υποερωτήματος **(α)**.

(Υπόδειξη : Στο ερώτημα (α) εφαρμόστε τον τρόπο προσδιορισμού της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του επανζημένου πίνακα $(A|I)$ σύμφωνα με το Παράδειγμα 6, σελ. 53,54 του βιβλίου Τόμος Α': Γραμμική Άλγεβρα, Γ. Καμβύσα, Μ. Χατζηνικολάου. Στο ερώτημα (β) εργαστείτε σύμφωνα με το Παράδειγμα 7, σελ. 55 του βιβλίου Τόμος Α': Γραμμική Άλγεβρα, Γ. Καμβύσα, Μ. Χατζηνικολάου).

Λύση

Άσκηση 4^η (20 μονάδες)

Δίνεται το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ ax + y + z + w = b \\ 3x + 2y + aw = 1 + a \end{cases}, x, y, z, a, b \in \mathbb{R} \quad (1).$$

(α) (12 μονάδες) Να βρεθούν οι τιμές των a, b για τις οποίες το σύστημα (1) έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων.

(β) (6 μονάδες) Να λυθεί το σύστημα (1) για $a=b=2$ και για $a=b=1$.

(γ) (2 μονάδες) Είναι το σύνολο U των λύσεων του συστήματος (1) για $a=0, b=1$, δ. υποχώρος του $\mathbb{R}^4$;

(Υπόδειξη : Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss στην επίλυση του δοθέντος συστήματος και εργαστείτε σύμφωνα με το Παράδειγμα 5, σελ. 51 του βιβλίου Τόμος Α΄: Γραμμική Άλγεβρα, Γ. Καμβύσα, Μ. Χατζηνικολάου).

Λύση

Άσκηση 5^η (20 μονάδες)

Δίνονται τα υποσύνολα U, V, W, A, B των αντίστοιχων δ. χώρων:

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y - z = 0\} \subseteq R^3, \quad V = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + 2y + z = 0\} \subseteq R^3,$$

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 2x + y + 2z = 2\} \subseteq R^3$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & y \end{pmatrix} \mid x, y \in R \right\} \subseteq M_{22}(R), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x + y \end{pmatrix} \mid x, y \in R \right\} \subseteq M_{22}(R)$$

(α) (7 μονάδες) Να εξεταστεί ποια από τα παραπάνω σύνολα U, V, W, A, B είναι δ. υποχώροι των αντίστοιχων δ. χώρων και να προσδιοριστεί μια βάση και η διάστασή τους.

(β) (5 μονάδες) Εξετάστε αν αληθεύει η ακόλουθη πρόταση :

«ο δ. χώρος R^3 είναι άθροισμα ή ευθύ άθροισμα των U και V ».

(γ) (5 μονάδες) Εξετάστε αν αληθεύει η ακόλουθη πρόταση :

«ο δ. χώρος $M_{22}(R)$ είναι άθροισμα ή ευθύ άθροισμα των A και B ».

(δ) (3 μονάδες) Να βρεθεί δ. υποχώρος E του $M_{22}(R)$ τέτοιος ώστε $M_{22}(R) = A \oplus E$.

Λύση

Άσκηση 6^η (20 μονάδες)

(α) (8 μονάδες) Χρησιμοποιώντας την κλιμακωτή μορφή του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ να

προσδιοριστεί η διάσταση και μια βάση του χώρου γραμμών $\text{rowsp}(A)$, του χώρου στηλών $\text{colsp}(A)$ και του μηδενόχωρου $N(A)$ του A .

(β) Δίνεται ο δ. χώρος $(R^4(R), +, \cdot)$, μια βάση του $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ και το διάνυσμα $b = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \in R^4$. Αν $T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ με $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_2 = e_2 + e_3$, $\varepsilon_3 = e_3 + e_4$, $\varepsilon_4 = ae_4 + e_1$, $a \in R$, είναι ένα υποσύνολο του R^4 , τότε

(β.1) (5 μονάδες) Να βρεθούν όλες οι τιμές του $a \in R$, για τις οποίες το σύνολο T αποτελεί μια βάση του δ. χώρου $(R^4(R), +, \cdot)$.

(β.2) Για τις τιμές του a του υποερωτήματος (β.1),

(β.2.1) (2 μονάδες) Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την B στην T ,

(β.2.2) (5 μονάδες) Να προσδιοριστεί το διάνυσμα συντεταγμένων $[b]_T$.

Λύση