

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» Φεβρουάριος 2009

✓ ΘΕΜΑ 1 Α) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τον άξονα $y'z'$ και διέρχεται από το σημείο $(1, 2, -4)$.

✓ Β) Ναδειχθεί ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): \frac{x-1}{2} = y = 1-z \text{ και } (\varepsilon_2): x-y-z=2, \quad 2x-y=5$$

τέμνονται και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

ΘΕΜΑ 2 Α) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη $(c): z = x^2 + y^2, y + z = 1$ και γενέτειρες παράλληλες στον άξονα $z'z$, και στη συνέχεια μια παραμετρική παράσταση της (c) .

Β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2)$.

α) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση στον πυρήνα $N(T)$ και το σύνολο τιμών της $R(T)$

β) Να βρεθεί ο πίνακας της ως προς τις βάσεις: $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ για το πεδίο ορισμού και την κανονική για τον δεύτερο χώρο.

✓ ΘΕΜΑ 3 Α) Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$: $S_1 = \{(1, -1, 2, -3), (1, 1, 2, 0), (3, -1, 6, -6)\}$ και $S_2 = \{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 3)\}$. Να δείξετε ότι δεν παράγουν τους ίδιους υπόχωρους, είναι δηλαδή $U_1 = [S_1] \neq U_2 = [S_2]$. Να βρείτε μια βάση του $U_1 + U_2$ και τις διαστάσεις των $U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$.

Β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{array}{ll} x + 2y + z = \lambda^2 & x + 2y + z = \lambda^2 \\ x + y + 3z = \lambda & (\Sigma_1) \quad \text{και} \quad x + y + 3z = \lambda & (\Sigma_2) \\ 3x + 4y + 8z = 8 & 3x + 4y + 7z = 8 \end{array}$$

είναι συγχρόνως συμβιβαστά. Να λύσετε το σύστημα (Σ_2) , όταν $\lambda > 0$.

✓ ΘΕΜΑ 4 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- i) Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.
- ii) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A και να δείξετε ότι ισχύει $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
- iii) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του $B = 2A^3 - 5A^2 + 4A - I$ και να δείξετε ότι ισχύει $B^{2n+1} = B$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία !

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» **Ιούλιος 2007**

ΘΕΜΑ 1^ο Α) Δίνονται οι ευθείες

(ε1): $x - 1 = 1 - y = z$ και (ε2): $x - 1 = y - 1 = z$

- 1) Να αποδειχθεί ότι τέμνονται και να βρεθεί το σημείο τομής τους.
- 2) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (p) που περιέχει και τις δύο ευθείες.
- 3) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο τομής των (ε1) και (ε2) και είναι κάθετο στην ευθεία (δ): $6(x - 2) = 3(1 - y) = 2(z - 1)$.

Β) Να αποδειχθεί ότι ένα διάνυσμα x είναι κάθετο στο $a = (1, 1, 1)$, αν και μόνο αν αυτό είναι συνεπίπεδο με τα $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ΘΕΜΑ 2: Α) Να αναγνωρισθούν και να σχεδιασθούν χωριστά και μετά στο ίδιο σχήμα οι επιφάνειες:

$$x^2 + y^2 - z = 9, \quad z + x^2 + y^2 = 4$$

Β) Δίνεται η σφαίρα $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$ και το επίπεδο $x - y + z = 3m$.

1. Να βρεθεί το m ώστε: (i) το επίπεδο να εφάπτεται και (ii) να τέμνει τη σφαίρα.
2. Ναδειχθεί ότι όταν $m = 1$ το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που παράγεται από την τομή.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της προβολής του κύκλου του ερωτήματος 2. στο επίπεδο xOy εξηγώντας τη διαδικασία.

ΘΕΜΑ 3^ο: Α) Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τους υποχώρους του:

$$V_1 = [(-1, 7, -7, 5), (3, 9, -9, 5)],$$

$$V_2 = [(3, -2, 3, -1), (1, 0, 1, 1), (1, -1, 1, -1)].$$

Να βρείτε μια βάση του υπόχωρου $V_1 + V_2$ και τη διάσταση του $V_1 \cap V_2$.

Β) Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x + 7y - w &= k \\ x + 3y - 2z + w &= \lambda \quad (\Sigma) \\ x + 2y + z - w &= \mu \end{aligned}$$

- i) Να βρεθεί η συνθήκη για τα $k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα (Σ) να είναι συμβιβαστό.
- ii) Να λυθεί το (Σ) για $(k, \lambda, \mu) = (3, 1, 1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο: Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = A^4 - 6A^3 + 9A^2 + 3A - 11I$.

i) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A .

ii) Αφού εκφράσετε τον B ως πολυώνυμο του A , με τον μικρότερο δυνατό βαθμό, να βρείτε μια διαγωνοποίηση του B^{-1} .

ΘΕΜΑ 5^ο: Α) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z, w) = (z - w, 2z, w).$$

Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ καθώς και τον πυρήνα της $N(T)$.

Β) Έστω $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^\perp$ του M καθώς και μια ορθοκανονική βάση του. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία του $M^\perp$.

Να γράψετε τα δύο πρώτα θέματα και δύο θέματα από τα: 3^ο, 4^ο και 5^ο, με δική σας επιλογή.

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία !



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ
ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....ΕΠΑΝΗΛΕΞΑΝΤΕΣ.....

1 Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των οριζουσών δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma)^3.$$

2 Δίδεται ο γραμμικός τελεστής $T((x, y, z)_\Sigma) = (x + z, x + y, -y + z)_\Sigma$

(i) Βρείτε τον πίνακα A_T του T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ και το βαθμό του A_T .

(ii) Βρείτε τη διάσταση του πυρήνα $\text{Kern} T$ και του πεδίου τιμών $T(\mathbb{R}^3)$. Ποια ισότητα ισχύει, $\text{rank} A_T = \dim(\text{Kern} T)$ ή $\text{rank} A_T = \dim T(\mathbb{R}^3)$;

(iii) Δίδεται η βάση $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ του $\mathbb{R}^3$, όπου $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)_\Sigma$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)_\Sigma$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)_\Sigma$. Βρείτε τον πίνακα Γ_T του T ως προς τη βάση B και την εικόνα, ως προς τη συνήθη βάση, του σημείου $(1, 2, 3)_B$ μέσω του T .

3 Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα επίπεδα $x + y + z = \lambda$, $x - y + z = 0$ τέμνονται κατά μία ευθεία ε_λ . Επίσης για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ τα επίπεδα $x + y - z = \mu$, $x - y - z = 0$ τέμνονται κατά μία ευθεία ε'_μ .

(i) Δοθέντος του λ για ποια τιμή του μ η ε'_μ τέμνει την ε_λ .

(ii) Δείξτε ότι τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών ε_λ , ε'_μ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, βρίσκονται επί ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4 Δικαιολογείστε, χωρίς να κάνετε πράξεις, ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι

διαγωνοποιήσιμος και βρείτε μια διαγωνοποίηση του $A = P \Delta P^{-1}$, όπου P είναι ένας ορθογώνιος πίνακας.

5 Δίδεται η καμπύλη δευτέρου βαθμού $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y = 0$

(i) Γράψτε την καμπύλη στη φυσική της μορφή.

(ii) Κατασκευάστε τους νέους άξονες ως προς τους οποίους η καμπύλη γράφεται στη φυσική μορφή και σχεδιάστε την καμπύλη.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΣΧΟΛΗ ΕΓΚΛΗΤΩΝ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ..... ΛΗΑΝΤΟΥΡΔΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ.....

1. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των οριζουσών (ανάλυση σε άθροισμα οριζουσών κ.λ.π) και όχι με ανάπτυξη, δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

3x3 determinant

(Λαμβάνεται ως γνωστό ότι η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.)

2. Δίδονται οι μονοπαραμετρικές οικογένειες ευθειών

$$\varepsilon_1(\lambda): \begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x-y+z=0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \varepsilon_2(\mu): \begin{cases} x+2y+z=\mu \\ x-z=1 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε σχέση $\mu=\mu(\lambda)$ ώστε οι αντίστοιχες ευθείες $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\mu(\lambda)}$ να τέμνονται. Βρείτε την τομή των $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\mu(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και αναγνωρίστε την γεωμετρικά.

3. Δίδονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βρείτε πίνακα X ώστε να ισχύει $A^4X + 3A^3B - 2A^3 = 0$.4. Δίδεται ο γραμμικός τελεστής $T((x, y, z)_\Sigma) = (3x - z, 2y, -x + 3z)_\Sigma$.Βρείτε τον πίνακα του T ως προς τη συνήθη βάση Σ του $\mathbb{R}^3$.Βρείτε μια διαγωνιοποίηση $P\Delta P^{-1}$ του T με P ορθογώνιο.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

10 Σεπτεμβρίου 2008

$$A^4 = \begin{pmatrix} 32 & 6 & 28 \\ 15 & 6 & 13 \\ 40 & 28 & 60 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{(a+b)^3}$$



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

1. Ποιες τι σημαίνει ότι οι διανύσματα u_1, u_2, u_3 ενός γραμμικού χώρου E είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δείξτε ότι στον $\mathbb{R}^3$ τρία ανά δύο ορθογώνια διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β) Έστω E, F δύο γραμμικοί χώροι και $T \in L(E, F)$. Αν η γραμμική απεικόνιση T είναι 1-1 και τα $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι και οι εικόνες $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του F .

2. Βρείτε μια βάση του γραμμικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ τα στοιχεία (x, y, z, w) του οποίου (υπόχωρου) ικανοποιούν τις σχέσεις $x + y - z + w = 0$ και $x - y + z - w = 0$.

3. Έστω $X, T, S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ και έστω ότι οι πίνακες των T, S ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι αντίστοιχα,

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αν ισχύει $2X + T^{-1}S = 0$, βρείτε τον πίνακα A_X του X ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$.

3. (α) Να λυθεί και να διαρευνηθεί το σύστημα

$$\lambda x - y - z = 1$$

$$x + \lambda y + z = \lambda$$

$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

Σχολιάστε γεωμετρικά το αποτέλεσμα

(β) Για $\lambda = 1$ αναγνωρίστε γεωμετρικά τη λύση του συστήματος. Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, -1, 1)$ και είναι κάθετη στη λύση. Εξετάστε αν η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $(3, 1, 3)$.

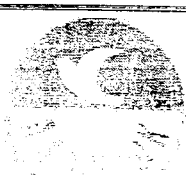
4. Έστω ο $\mathbb{R}^3$ και δύο βάσεις $\Sigma = \{u_1, u_2, u_3\}$ η παρμένη, και $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, όπου

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), u_3 = (0, 0, 1).$$

(α) Δείξτε ότι η B είναι ορθοκανονική βάση.

(β) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσεων P από την Σ στην B και τον πίνακα αλλαγής βάσεων $Q = P^{-1}$ από την B στην Σ . Στη συνέχεια βρείτε τις συντεταγμένες του $(1, 1, 1)_\Sigma$ ως προς τη βάση Σ και του $(\sqrt{2}, 0, 1)_B$ ως προς τη βάση B .

Συνέχεια στην πίσω σελίδα =



(γ) Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $T((x, y, z)_E) = (x + y, y + z, z + x)_E$.
Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις βάσεις Σ και B και γράψτε τον τύπο της T ως προς τις
βάσεις Σ και B . Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $(1, -2, 1)_E$ ως προς τη βάση B .

3. (α) Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν διαγωνοποιείται, βρείτε μια διαγωνοποίηση του.

(β) Βρείτε τη γενική μορφή του A^n .

6. Γράψτε την εξίσωση δεύτερου βαθμού $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0$ στην φυσική της μορφή
και σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη που παριστάνει.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ε.Μ.Π.
Σ.Α.Τ.Μ.

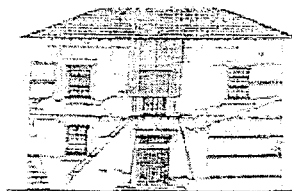
ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΕΙΣ, 1^ο Εξάμηνο
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ στις 14/09/2004

ΘΕΜΑ

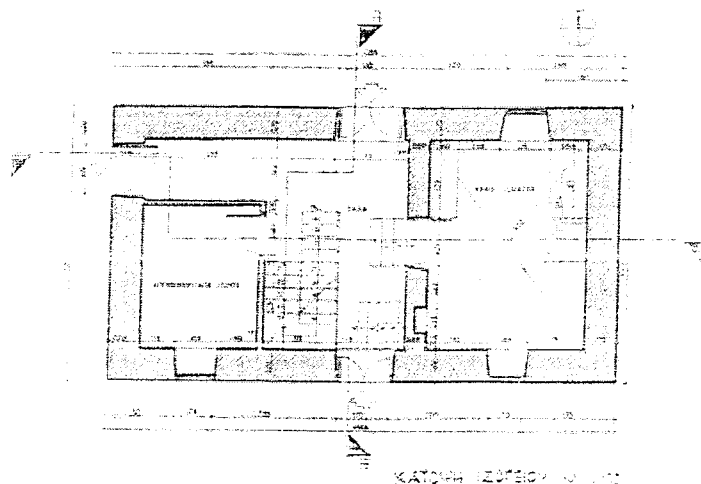
Η χαρακτηριστική Κυριοκούνια κατοικία στους Λοφούς Καρότιστας προκειται να
συντηρηθεί και να επανασυνιστοιχηθεί. Ζητείται να σχεδιαστεί η κατοική του ισό-
γειου σε κλίμακα 1/50. Η σχεδίαση θα γίνει με μέτρο σε χαρτί Α3 (δύο διαιρέσεις).

Σημειώνεται:

να ανακατασκευαστεί ο κεντρικός ή ο αριστερός τοίχος της στο σπίτι και το υπαίθριο του
αγρότιου.



ΠΡΟΣΩΠΗ



ΚΑΤΩΦΛΗ ΙΣΟΓΕΙΟΥ