

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2012



1) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων $P(x)$ 4^{ου} βαθμού.

α) Να αποδειχθεί ότι το υποσύνολο U του V που ικανοποιεί την σχέση $P(5) = 0$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο.

β) Να βρεθεί μια βάση αυτού του υποχώρου

γ) Εάν ζητήσουμε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει και το 3 σαν ρίζα τότε το νέο υποσύνολο W που ορίζεται $W = \{P(x) / P(x) = (x-3)(x-5)(b_0 + b_1x + b_2x^2)\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος; Εάν ναι βρείτε μια βάση του. (2,5)

2) Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ και γιατί;

α) $U = \{(x, y, z) / x - 3y + 2z = 0\}$

β) $W = \{(x, y, z) / x - 3y + 2z = 2\}$ (2,5)

3) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz $|(v, u)| \leq \|v\| \|u\|$ ναδειχθεί ότι

εάν $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ τότε $\left(\sum_{j=1}^n a_j\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$. (2)

4) Αποδείξτε ότι ο μεταθέτης δύο πινάκων A και B ποτέ δεν μπορεί να είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα. (1)

5) Δίνεται ο πίνακας $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για

τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος. (2)

Άσκηση 4 (Γενάρης 2012) Λύση

Έστω ότι $AB - BA = \kappa I_n$

$$\text{Τότε} \quad \text{trac}(AB - BA) = \text{trac}(\kappa I_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{trac}(AB) - \text{trac}(BA) = \kappa \text{trac} I_n \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = \kappa n \quad \Rightarrow \quad \kappa = 0$$

Πού οδηγεί ότι ο μετασχηματισμός των πινάκων A, B

είναι μηδενικό πολλαπλάσιο τα τετραγωνικά πίνακες

Άσκηση 5 (Γράμμα 2012) Λύση: Δίνεται ο πίνακας

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολώνυμο του πίνακα A

από τη σχέση

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} x-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (x-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Η επίδωση

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (x-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \quad \text{δίνει τρία ιδιοτιμές}$$

$$\text{του } A: \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = x$$

Επομένως αν

$$x \neq 2, 3 \quad \circ \quad A \text{ διαγωνοποιείται γιατί έχει}$$

διαμεριστέα (διαφορετικές ανά δύο) ιδιοτιμές

Αν $x=2$ τότε η ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ είναι κληρονομική

Πολλαπλότητας 2, τ'έχει αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

που προκύπτουν από την λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος

$$(A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 0 \\ -1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = -y, \quad y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \right\}$$

Είναι βέβαια ημίδος ένα το π.κ $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Άρα ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται

Αν $x=3$ τότε η ιδιοτιμή $\lambda_2=3$ είναι πολλαπλότητας

2, τ'έχει αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$(A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ -1 & 1 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Είναι οι πηλίκος δύο π.χ το $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αρα ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος

Τέλος αν $x \in \mathbb{R}$ $\forall x \neq 2$ ο A διαγωνοποιείται