

Η εξέταση είναι τριώρη. Γράφετε όλα τα θέματα που είναι ισοδύναμα. Δεν επιτρέπεται ο δανεισμός αντικειμένων, ούτε η χρήση βιβλίων, σημειώσεων, κινητών, υπολογιστών. Να σημειώνετε καθαρά κάθε σελίδα που χρησιμοποιείτε ως πρόχειρο. Αν υπάρχουν ξεχωριστά πρόχειρα τα παραδίδετε χωρία για να πεταχτούν. Είναι σημαντικό να γράφετε όσο πιο ευανάγνωστα μπορείτε, οι πολλές μουτζούρες και τα δυσανάγνωστα κείμενα μπορεί να αφαιρέσουν μονάδες. Καλή επιτυχία.

1. Να υπολογιστεί ο μιγαδικός αριθμός $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$.

2. Εξετάστε αν το διάνυσμα $(-4, 3, 14)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα $(1, -1, -2)$, $(5, -4, -10)$, $(-3, 1, 0)$.

3. Να βρείτε την απλή κλιμακωτή μορφή (γραμμοκανονική μορφή) του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 6 & 6 & 0 & 20 & 19 \end{pmatrix}$.

4. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha + \gamma)$. Να βρεθεί ο πίνακας της f στις βάσεις $\{e_1, e_2, e_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ και $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ του $\mathbb{R}^2$, όπου $e_1 = (1, 0, -1)$, $e_2 = (1, 1, 1)$, $e_3 = (1, 0, 0)$ και $\bar{e}_1 = (0, 1)$, $\bar{e}_2 = (1, 0)$. Αν $v = (5, 7, 9) \in \mathbb{R}^3$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του $f(v)$ στη βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

6. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ να βρεθεί ο πίνακας A^{13} .

7. Να διαγωνοποιηθεί η τετραγωνική μορφή $Q = 3x^2 + 10xy + 3y^2$.