



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2011

1) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων $P(x)$ 3^{ου} βαθμού.

α) Να αποδειχθεί ότι το υποσύνολο U του V που ικανοποιεί την σχέση $P(7)=0$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο.

β) Να βρεθεί μια βάση αυτού του υποχώρου (2)

2) Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του διανυσματικού χώρου R^3 αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του R^3 ;

α) $U = \{ (x,y,z) / x+y+z=0 \}$ β) $W = \{ (x,y,z) / x+y+z=2 \}$ (1)

3) Έστω ο διανυσματικός χώρος M_2 των τετραγωνικών πινάκων 2×2 και η απεικόνιση

$$T: M_2 \rightarrow M_2, \quad T: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

A) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση T είναι γραμμική.

B) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης T .

Γ) Οι διαστάσεις της εικόνας $\text{Im}(T)$ και του πυρήνα $\text{Ker}(T)$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε το διάνυσμα-πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ σαν διάνυσμα-στήλη $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$). (2,5)

4) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του διαφορικού τελεστή $\frac{d}{dx}$ ο οποίος επιδρά στον διανυσματικό χώρο $P_3(x)$ των πολυωνύμων 3^{ου} βαθμού. (2)

5) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V = \{ (x,y,z,w) / y+z+w=0 \}$ του R^4 . Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V . (2,5)

Άσκηση 3. Λύση : Δίνεται η απεικόνιση $T: M_2 \rightarrow M_2$

$$\text{μέτρος } T: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix} \quad (1)$$

Α) Ελέγχουμε αν είναι γραμμική, δηλαδή αν
ισχύει η σχέση

$$T\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) + \mu T\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$$

Έχουμε διεισδύσει

$$T\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= T\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 & \lambda d_1 + \mu d_2 \end{pmatrix}\right) \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} 2(\lambda c_1 + \mu c_2) & \lambda a_1 + \mu a_2 + \lambda c_1 + \mu c_2 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 - 2(\lambda c_1 + \mu c_2) & \lambda d_1 + \mu d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda c_1 + 2\mu c_2 & \lambda(\alpha_1 + c_1) + \mu(\alpha_2 + c_2) \\ \lambda(b_1 - 2c_1) + \mu(b_2 - 2c_2) & \lambda d_1 + \mu d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda c_1 & \lambda(\alpha_1 + c_1) \\ \lambda(b_1 - 2c_1) & \lambda d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu c_2 & \mu(\alpha_2 + c_2) \\ \mu(b_2 - 2c_2) & \mu d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 2c_1 & \alpha_1 + c_1 \\ b_1 - 2c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2c_2 & \alpha_2 + c_2 \\ b_2 - 2c_2 & d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda T \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \mu T \begin{pmatrix} \alpha_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Άρα λοιπόν ισχύει η σχέση η T γραμμική

β) Σύμφωνα με την υπόθεση (θεωρούμε

το διάνυσμα-πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}$ του χώρου

M_2 : Διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών

3.
2x2 πινάκων, εάν δίνουμε στοιχεία: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Γνωρίζετε τα διανυσματικά-πίνακες της μεμονωμένης

βάσης του χώρου M_2 που είναι:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

εάν δίνουμε τότε

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως βρίσκουμε τον πίνακα της T

ως προς την συνήθη βάση: $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$T(e_1) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$T(e_2) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4$$

$$= (1-\lambda) \left[-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (1-\lambda) \left[-\lambda \left(-\lambda(-2-\lambda) - 1 \right) + 2(1-0) \right] =$$

$$= (1-\lambda) \left[-\lambda (2\lambda + \lambda^2 - 1) + 2 \right] =$$

$$= (1-\lambda) \left[-2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + 2 \right] = (1-\lambda) (-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2) =$$

$$= (1-\lambda) \left(-\lambda^2(\lambda+2) + (\lambda+2) \right) = (1-\lambda)(\lambda+2)(1-\lambda^2) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+2)(1-\lambda)(1+\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda+2)(1+\lambda)$$

Τότε η εξίσωση

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(\lambda+2)(1+\lambda) = 0$$

δίνει τρεις ιδιοτιμές του πίνακα : $\lambda_1 = 1$ (διπλή ιδιοτιμή)

$\lambda_2 = 2$ (απλή) $\lambda_3 = -1$ (απλή)

$$T(e_3) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 + 1e_2 - 2e_3 + 0e_4$$

$$T(e_4) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$$

Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας είναι

$$[T]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

παραπάνω πίνακα από την σχέση

$$P(\lambda) = \det(T - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{ανέπτυξε} \\ \text{4}^{\text{th}} \text{ γραμμή} \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{ανέπτυξε} \\ \text{1}^{\text{st}} \text{ γραμμή} \end{matrix} =$$

6.

Προχωρούμε στην εύρεση των αντίστοιχων ιδιοδιευθετήσεων

Για την δοσμένη ιδιοτιμή $\lambda = 1$ λύνουμε το αντίστοιχο

ομογενές σύστημα

$$(T - \lambda I_4) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -a & + 2c & = 0 \\ a - b + c & & = 0 \\ & b - 3c & = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2c \\ c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \\ b = 3c \end{array} \right\}$$

Οπότε

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 3c \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 3c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c, d \in \mathbb{R}$

απ' όπου τ' ιδιοδιευθετικές

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \text{διένυστα-πίνακα} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{---//---} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.

Ομοίως για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ έχουμε

$$(T - \lambda_2 I_4) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \\ 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{R} \\ d = 0 \end{cases}$$

με

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

άρα είναι το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{μέ διάνυσμα-πίνακα} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ομοίως για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = -1$ έχουμε

$$(T - \lambda_3 I_4) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = c \\ c \in \mathbb{R} \\ d = 0 \end{cases}$$

μ ∈

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

απ' όπου το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \text{ιδιοδιάνυσμα} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{Τότε} \quad \vec{v} \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow$$

$$T(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2c = 0 \\ a + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ d = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα: } \text{Ker}(T) = \{0\} \quad (0: \text{φινίσιον μηδέν})$$

$$\text{και } \dim \text{Ker}(T) = 0$$

Επομένως από το θεώρημα του διαζεύκτη

παρατηρούμε

$$\dim(M_2) = \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T)$$

$$4 = 0 + \dim \text{Im}(T)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im}(T) = 4$$

Άσκηση 4. Άσκηση

Κάθε πολυώνιο 3^{ου} βαθμού $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$

μπορεί να θεωρηθεί ότι διένυτε - στην τριτοβάθμια

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{με } \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Η παράγωγος του πολυωνύμου είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_3(x) &= \frac{d}{dx} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) = \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 \end{aligned}$$

με αντίστοιχο διάνυσμα - στην : $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \end{bmatrix}$

Ο αντίστοιχος πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού

που αντιστοιχεί στον διχωρισμό τέτταρι $\frac{d}{dx}$

βρίσκεται με σύρση του διχωρισμού τέτταρι

$\frac{d}{dx}$ στην συνήδη βάση του διχωρισμού χάρου

Τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μας είναι: $\{1, x, x^2, x^3\}$

Εκούφτ

$$\frac{d}{dx}(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

Επομένως ο πίνακας πινκας είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A έχει μοναδική ιδιοτιμή το $\lambda = 0$

(ο A είναι τριγωνικός άνω πίνακας)

Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

λύνουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda I_4) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad \forall \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

Προφανώς

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και το αντίστοιχο πολυώνυμο}$$

$$P_3(\lambda) = \alpha_0$$

Άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (των ιδιοτιμών $\lambda=0$)

είναι τα σταθερά πολυώνυμα

Άσκηση 5 Άσκηση: Δίνεται ο διανυσματικός υπόχωρος

$$\text{του } \mathbb{R}^4 : V = \{(x, y, z, w) : y + z + w = 0\}$$

Έχουμε διδοχικά:

$$V = \{(x, y, z, w) : y + z + w = 0\} = \{w = -y - z\}$$

$$= \{(x, y, z, -y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(x, 0, 0, 0) + (0, y, 0, -y) + (0, 0, z, -z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \rangle$$

Εντός ο υπόχωρος V παράγεται από τα

$$\text{διανύσματα } \vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, -1), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, -1)$$

του $\mathbb{R}^4$

Exaktlösung in Dirac'scher zur Gram-Schmidt

Startvektoren $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Έτσι το σύνολο $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ με

ορθογώνια βάση του V

Κανονικοποιούμε τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Έχουμε

$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{(1, 0, 0, 0)}{1} = (1, 0, 0, 0)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{(0, 1, 0, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 0, -1)$$

$$\hat{u}_3 = \frac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|} = \frac{(0, -1, 2, -1)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (0, -1, 2, -1)$$

Επομένως το σύνολο

$$\hat{u}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 0, -1) \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (0, -1, 2, -1)$$

ή γραμμών ορθοκανονική βάση του V