



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2012

1) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων $P(x)$ 4^{ου} βαθμού.

α) Να αποδειχθεί ότι το υποσύνολο U του V που ικανοποιεί την σχέση $P(3)=0$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο.

β) Να βρεθεί μια βάση αυτού του υποχώρου

γ) Εάν ζητήσουμε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει και το 4 σαν ρίζα τότε το νέο υποσύνολο W που ορίζεται $W = \{p(x) / p(x) = (x-3)(x-4)(b_0 + b_1x + b_2x^2)\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος; Εάν ναι βρείτε μια βάση του. (2,5)

2) Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ και γιατί;

α) $U = \{ (x,y,z) / 2x-3y+z=0 \}$

β) $W = \{ (x,y,z) / 2x-3y+z=2 \}$ (2,5)

3) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz $|(v,u)| \leq \|v\| \|u\|$ να δειχθεί ότι

εάν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ τότε $\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right) \geq n^2$. (2)

4) Έστω A ένας πίνακας 2×2 . Αποδείξτε ότι εάν το ίχνος του A είναι μηδέν, τότε ο A^2 είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού πίνακα. (1)

5) Δίνεται ο πίνακας $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για

τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος. (2)

1.
Άσκηση 1 Λύση Δίνεται ο διανυσματικός χώρος V
των πολυωνύμων $P(x)$ 4^{ου} βαθμού

α) Η διάνυσμα του V έχουν την μορφή

$$p(x) = (x-3)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)$$

Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι ένας τυχόντος

συνδυασμός δύο τέτοιων πολυωνύμων είναι πάλι

ένας πολυώνυμο της ίδιας μορφής. Προσέχουμε

$$\mu p_1(x) + \lambda p_2(x) = \mu (x-3)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) +$$

$$+ \lambda (x-3)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) =$$

$$= (x-3) \left(\mu (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) + \lambda (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) \right)$$

$$= (x-3) p(x)$$

$$\text{οπότε } p(x) = \mu (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) + \lambda (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

Δυνάμως τού υποσώου V είναι διανυσματικός υπόχωρος
του V

β) Η γενική μορφή των πολυωνύμων 4^{ου} βαθμού είναι

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$$

και το υποχώρημα $\mathcal{V}$ ορίζεται από την σχέση

$$\mathcal{V} = \left\{ P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \mid \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 3 + \alpha_2 3^2 + \alpha_3 3^3 + \alpha_4 3^4}_{P(3)=0} = 0 \right\}$$

$$\text{Επειδή} \quad \alpha_0 + 3\alpha_1 + 3^2\alpha_2 + 3^3\alpha_3 + 3^4\alpha_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_0 = -3\alpha_1 - 3^2\alpha_2 - 3^3\alpha_3 - 3^4\alpha_4$$

αذا πολυώνυμο του $\mathcal{V}$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} P(x) &= -(3\alpha_1 + 3^2\alpha_2 + 3^3\alpha_3 + 3^4\alpha_4) + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 = \\ &= \alpha_1 (x - 3) + \alpha_2 (x^2 - 3^2) + \alpha_3 (x^3 - 3^3) + \alpha_4 (x^4 - 3^4) \end{aligned}$$

Μία βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}$ είναι

$$B = \{ (x-3), (x^2-3^2), (x^3-3^3), (x^4-3^4) \}$$

γ/ Τα διανύσματα του W έχουν τη μορφή

$$p(x) = (x-3)(x-4)(b_0 + b_1x + b_2x^2)$$

Πρέπει να δείξουμε ότι ο γραμμικός
συνδυασμός

$$\mu p_1(x) + \lambda p_2(x)$$

είναι ένα πολώνυμο της ίδιας μορφής

Εκουμε διότι:

$$\mu p_1(x) + \lambda p_2(x) = \mu (x-3)(x-4)(b_0 + b_1x + b_2x^2) +$$

$$+ \lambda (x-3)(x-4)(c_0 + c_1x + c_2x^2) =$$

$$= (x-3)(x-4) (\mu (b_0 + b_1x + b_2x^2) + \lambda (c_0 + c_1x + c_2x^2)) =$$

$$= (x-3)(x-4) p(x)$$

οπότε $p(x) = \mu (b_0 + b_1x + b_2x^2) + \lambda (c_0 + c_1x + c_2x^2)$

4.

Συνεπώς το υποδύναμο W είναι διανυσματικός
υπόχωρος του V

Προσδιορισμός μιας βάσης του W

Επειδή είναι πολυώνυμο του W μπορεί να
χρηστεί ως βάση

$$P(x) = (x-3)(x-4)(b_0 + b_1x + b_2x^2) =$$

$$= (x^2 - 7x + 12)(b_0 + b_1x + b_2x^2) =$$

$$= b_0(x^2 - 7x + 12) + b_1x(x^2 - 7x + 12) + b_2x^2(x^2 - 7x + 12) =$$

$$= b_0(x^2 - 7x + 12) + b_1(x^3 - 7x^2 + 12x) + b_2(x^4 - 7x^3 + 12x^2)$$

Μια βάση των υποχώρων W είναι

$$B' = \{ x^2 - 7x + 12, x^3 - 7x^2 + 12x, x^4 - 7x^3 + 12x^2 \}$$

Άσκηση 2 Λύση : Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ χώρου

$$V = \{ (x, y, z) / 2x - 3y + z = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z) / 2x - 3y + z = 2 \}$$

α) Το $\mu\eta$ κενό υποσύνολο V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

Πρέπει για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$

διανυσμάτα του V ισχύει : $\kappa u_1 + \lambda u_2 \in V$

Έχουμε διδοχικοί

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ u_2 = (x_2, y_2, z_2) \end{array} \right\} \in V \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 - 3y_1 + z_1 = 0 \quad \textcircled{1} \\ 2x_2 - 3y_2 + z_2 = 0 \quad \textcircled{2} \end{array}$$

Οπότε

$$\kappa u_1 + \lambda u_2 = (\kappa x_1 + \lambda x_2, \kappa y_1 + \lambda y_2, \kappa z_1 + \lambda z_2)$$

Επί (πρέπει να δείξουμε ότι $\kappa u_1 + \lambda u_2 \in V$)

$$2(\kappa x_1 + \lambda x_2) - 3(\kappa y_1 + \lambda y_2) + (\kappa z_1 + \lambda z_2) =$$

$$= \kappa (2x_1 - 3y_1 + z_1) + \lambda (2x_2 - 3y_2 + z_2) \stackrel{\textcircled{1} \textcircled{2}}{=} \kappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = 0$$

Άρα $\kappa u_1 + \lambda u_2 \in V$ και επομένως το υποσύνολο V
διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

β) Το μη κενό υποσύνολο W του χώρου $\mathbb{R}^3$ δεν είναι υπόχωρος του γιατί δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

Παράδειγμα $(0,0,0) \notin W$ αφού $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 1$

Άσκηση 3 Λύση

$$\text{Έστω } \vec{v} = (\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}) \quad \vec{u} = (\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}, \sqrt{\frac{1}{\alpha_2}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}})$$

Διευκρινίζεται του $\mathbb{R}^n$ χώρου με $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$

Επομένως

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{(\sqrt{\alpha_1})^2 + (\sqrt{\alpha_2})^2 + \dots + (\sqrt{\alpha_n})^2} = \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{(\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}})^2 + (\sqrt{\frac{1}{\alpha_2}})^2 + \dots + (\sqrt{\frac{1}{\alpha_n}})^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{u}) &= (\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n}) (\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}, \sqrt{\frac{1}{\alpha_2}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}}) = \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 = n \end{aligned}$$

$$|(\vec{v}, \vec{u})| \leq |u|$$

Τότε η ανισότητα Cauchy - Schwarz είναι

$$|(\vec{u}, \vec{u})| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \Leftrightarrow$$

$$|u| \leq \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^{1/2}$$

απλοποιώντας

$$\left(\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right)^{1/2} \right)^2 \geq |u|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \right) \geq u^2$$

Άσκηση 4 Νύξη

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ ο 2×2 πίνακας

για τον οποίο $\text{trace}(A) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_4 = 0$ (1)

Επομένως

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_4 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_4 \alpha_3 & \alpha_3 \alpha_2 + \alpha_4^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_4) \\ \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_4) & \alpha_3 \alpha_2 + \alpha_4^2 \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{=} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \alpha_2 + \alpha_4^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_3) I_2$$

$$\alpha_4 \neq 0 \quad \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \alpha_2 = -\alpha_4 \quad (\Rightarrow) \quad (\alpha_2)^2 = (\alpha_4)^2$$

Τέφλου δὲ γιὰ τὸν 2×2 πίνακα A ἔχουμε

$\text{trac}(A) = 0$ τότε ο πίνακας A^2 εἶναι

$$A^2 = \kappa I_2 \quad \text{ἐφ' ὃν } \kappa = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

δίνει πληροφορίες τοῦ τετραγωνικοῦ πίνακα.

Ασκηση 5 λύση: Δίνεται ο πίνακας

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A από τη σχέση

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & x-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(x-\lambda)$$

Η εξίσωση

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(1-\lambda)(x-\lambda) = 0$$

δίνει τις ιδιοτιμές του A : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = x$

Επομένως αν

$x \neq 1, 2$ ο A είναι διαγωνοποιήσιμος γιατί έχει

πρωτεύοντα και διακεκριμένους ιδιοτιμές

Αν $x=1$ τότε η ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ είναι πολλαπλότητα 2
 γι' ότ ανήκουμε ιδιοδιωόμενα, από το οριστικό είναι

$$(A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

Είναι 6ή πηίδος ένα. Άρα ο πίνακας A δεν

είναι διαγωνιοποιήσιμος

Αν $x=2$, τότε η ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ είναι

πολλαπλότητα 2, γι' ότ ανήκουμε ιδιοδιωόμενα

Ποι προκύπτουν από την ίδια τα διάνυσμα ο.γ.ν.α.ς
εξισώσεις

$$(A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-2 & -1 & 1 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y + z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Είναι 66 πηίδος δύο

Αρα ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος

Τελικά ο A διαγωνοποιείται αν $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$