



ΘΕΜΑΤΑ

Άσκηση 1^η Δίνονται οι $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$ και $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, z = 0\}$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε την διάσταση των τεσσάρων υπόχωρων του $\mathbb{R}^3$ U , W , $U \cap W$, $U + W$ και δείξτε ότι $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. (25 μονάδες)

Άσκηση 2^η Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{u} = (1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (3, -1, 1)$, $\mathbf{x} = (1, 3, 1)$ και τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, $U = \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

- Δείξτε ότι το σύνολο $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί ορθογώνια βάση του U . (8 μονάδες)
- Δείξτε ότι το διάνυσμα $(1, -2, -5)$ αποτελεί βάση του $U^\perp$. (7 μονάδες)
- Βρείτε δύο διανύσματα $\mathbf{p}$ και $\mathbf{p}'$ τέτοια ώστε να ισχύουν συγχρόνως: $\mathbf{p} \in U$, $\mathbf{p}' \in U^\perp$ και $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{p}'$. (10 μονάδες)

Άσκηση 3^η Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμικός μετασχηματισμός, με

$$\text{πίνακα αναπαράστασης τον πίνακα } [f]_E = A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

- Δείξτε ότι ο A είναι ορθογώνιος πίνακας. (7 μονάδες)
- Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση της εικόνας ($\text{Im} f$) του f . (8 μονάδες)
- Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ και $A\mathbf{x}, A\mathbf{y}$ οι εικόνες τους αντιστοίχως μέσω του μετασχηματισμού f . Δείξτε ότι $\cos(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. (10 μονάδες)

Άσκηση 4^η i) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση με $[f]_E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (E είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$). Βρείτε μία βάση S του $\mathbb{R}^2$ ως προς την οποία ο πίνακας αναπαράστασης της f να είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας $[f]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (13 μονάδες)

ii) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε για ποιες τιμές του x διαγωνοποιείται ο A .

Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (12 μονάδες)

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το άριστα αντιστοιχεί σε 100 μονάδες και η προαγωγή σε 50 μονάδες.
- Μόνο σωστά αριθμητικά αποτελέσματα αντιστοιχούν σε πλήρη βαθμολόγηση.
- Σας παρακαλούμε να μην καπνίζετε και να απενεργοποιήσετε τα κινητά τηλέφωνα σας.
- Η έξοδος από την αίθουσα κατά την διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται.
- Η αποχώρηση από την αίθουσα είναι δυνατή μετά την παρέλευση μιας ώρας από την έναρξη.

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι.

ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ - ΦΥΕ 20

Απαντήσεις στις ασκήσεις της επαναληπτικής εξέτασης στη Γραμμική Άλγεβρα

Αγαπητέ φοιτητή/τρια, οι απαντήσεις που ακολουθούν αποτελούν ενδεικτικές λύσεις των ασκήσεων της τελικής εξέτασης. Οποιαδήποτε άλλη μαθηματικά σωστή διαδικασία που τυχόν έχετε ακολουθήσει για την επίλυσή τους, είναι αποδεκτή.

Άσκηση 1^η Θα βρούμε τις διαστάσεις των υπόχωρων U και W του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + z\} = \{(y + z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(y, y, 0) + (z, 0, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, 1, 0), (1, 0, 1)). \end{aligned}$$

Οι γεννήτορες του U , $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι αφού $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ οπότε

αποτελούν μια βάση του U και $\dim(U) = 2$.

Επίσης,

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x, z = 0\} = \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1, -1, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, -1, 0)). \end{aligned}$$

Επομένως, το μη μηδενικό διάνυσμα $(1, -1, 0)$ αποτελεί μια βάση του W , οπότε $\dim(W) = 1$.

Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x, y, z) \in U \cap W$ θα πρέπει $\mathbf{x} \in U$ και $\mathbf{x} \in W$. Συνεπώς τα διανύσματα του

$$x - y - z = 0$$

συνόλου $U \cap W$ θα βρεθούν από τη λύση του ομογενούς συστήματος $x + y = 0$.

$$z = 0$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική επομένως $\mathbf{x} \in U \cap W \Leftrightarrow \mathbf{x} = (0, 0, 0)$. Άρα

$$U \cap W = \{\mathbf{0}\} \text{ και είναι ο μηδενικός υπόχωρος του } \mathbb{R}^3 \text{ με } \dim(U \cap W) = 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα διάστασης (σελ. 100) έχουμε,

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 1 - 0 = 3.$$

Το σύνολο $(U + W) \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός χώρος με $\dim(U + W) = 3$. Αφού $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ έπεται

ότι $(U + W) = \mathbb{R}^3$. Επίσης, όπως δείξαμε πιο πάνω, $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$. Άρα σύμφωνα με

θεώρημα 2.5.3 (σελ. 102) ισχύει ότι $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ δηλαδή ο $\mathbb{R}^3$ είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων του U και W .

Άσκηση 2^η i) Θεωρούμε τον πίνακα, $A = [\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ο οποίος με τη βοήθεια

γραμμοπράξεων φτάνει στην κλιμακωτή μορφή $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{5} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ από την οποία αμέσως συμπεραίνουμε

ότι το σύνολο $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί βάση του U (συνεπώς $U = \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$). Επί πλέον το σύνολο $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί ορθογώνια βάση του U αφού, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

ii) Έστω $\mathbf{n} = (x, y, z)$ με $x, y, z \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\mathbf{n} \in U^\perp = (\text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -5x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα, $\mathbf{n} \in U^\perp \Leftrightarrow \mathbf{n} = (x, -2x, -5x) = x(1, -2, -5)$, $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $U^\perp = \text{span}((1, -2, -5))$ οπότε το μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, -2, -5)$ αποτελεί βάση του $U^\perp$.

iii) Αφού το $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί ορθογώνια βάση του U , η προβολή του $\mathbf{x} = (1, 3, 1)$ πάνω στο U είναι το διάνυσμα,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{(1, 3, 1) \cdot (1, -2, 1)}{(1, -2, 1) \cdot (1, -2, 1)} (1, -2, 1) + \frac{(1, 3, 1) \cdot (2, 1, 0)}{(2, 1, 0) \cdot (2, 1, 0)} (2, 1, 0) = -\frac{2}{3} (1, -2, 1) + (2, 1, 0) = \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Αν τώρα θέσουμε $\mathbf{p}' = \mathbf{x} - \mathbf{p} = (1, 3, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right)$, έχουμε αμέσως τα εξής: $\mathbf{p} \in U$,

$\mathbf{p}' \in U^\perp$ και $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{p}'$.

Άσκηση 3^η i) Έχουμε ότι $[f]_E = A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι στήλες του

πίνακα A (και οι γραμμές του) είναι ορθοκανονικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Συνεπώς (βλέπε θεώρημα 3.8.1, σελ. 182) ο A είναι ορθογώνιος πίνακας.

ii) $\text{Im } f = \text{colsp}(A)$ (βλέπε σελ. 213). Συνεπώς $\text{Im } f = \text{span}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 1)\right)$. Οι

γεννήτορες του $\text{Im } f$ είναι τρία ορθοκανονικά διανύσματα (οι στήλες του ορθογώνιου πίνακα A) και συνεπώς αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\text{Im } f$.

iii) Ο A είναι ορθογώνιος πίνακας οπότε $A^{-1} = A^T$ και συνεπώς $AA^T = A^T A = I_3$.

Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ και $A\mathbf{x}, A\mathbf{y}$ οι εικόνες τους αντιστοίχως μέσω του μετασχηματισμού f . Εφαρμόζοντας τους τύπους του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{R}^3$ έχουμε,

$$(A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T I_3 \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T I_3 \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\|A\mathbf{y}\|^2 = (A\mathbf{y}) \cdot (A\mathbf{y}) = (A\mathbf{y})^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A^T A \mathbf{y} = \mathbf{y}^T I_3 \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2.$$

$$\text{Συνεπώς, } \cos(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \frac{(A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y})}{\|A\mathbf{x}\| \|A\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Άσκηση 4^η i) Θέτουμε $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του A είναι, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Για την διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 1$ έχουμε: $(A - I\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = -x_1, x_1 \in \mathbb{R}$.

Αν επιλέξουμε $x_1 = 2$ τότε $(x_1, x_2) = (2, -2)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Συνεπώς στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ αντιστοιχεί ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα του A που είναι το $\mathbf{v} = (2, -2)$. Η ιδιοτιμή αυτή είναι εκφυλισμένη αφού $m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$.

Για τον υπολογισμό ενός γενικευμένου ιδιοδιανύσματος έχουμε:

$$(A - I\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1, x_1 \in \mathbb{R}.$$

Αν επιλέξουμε $x_1 = 0$ τότε $x_2 = 1$. Επομένως ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{A}$ είναι το $\mathbf{w} = (0, 1)$.

Αν θέσουμε $\mathbf{P} = [\mathbf{v} \ \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε έχουμε ότι $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ (δηλ. ο $\mathbf{A}$ είναι όμοιος με τον άνω τριγωνικό πίνακα Jordan $\mathbf{J}$).

Από τα παραπάνω τώρα για το σύνολο $S = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ έπονται τα εξής:

Το S είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ (άλλωστε $|\mathbf{v} \ \mathbf{w}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$), και $[\mathbf{f}]_S = \mathbf{J}$.

Συνεπώς μια βάση του $\mathbb{R}^2$ ως προς την οποία ο πίνακας αναπαράστασης της $\mathbf{f}$ είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας $[\mathbf{f}]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι η $S = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

ii) Ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι άνω τριγωνικός οπότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια

στοιχεία του, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = x, \lambda_3 = 1$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το $x \in \mathbb{R}$:

1) Για $x \neq -1$ και $x \neq 1$ ο $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται γιατί έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές.

2) Για $x = -1$ τότε $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. Θα εξετάσουμε

την διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Έχουμε,

$$m_g(-1) = 3 - \text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_3) = 3 - \text{rank} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_a(-1).$$

Η διπλή ιδιοτιμή $\lambda = -1$ είναι εκφυλισμένη συνεπώς για $x = -1$ ο $\mathbf{A}$ δεν διαγωνοποιείται.

3) Για $x = 1$ τότε $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Θα εξετάσουμε την

διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Έχουμε,

$$m_g(1) = 3 - \text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) = 3 - \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1 < m_a(1).$$

Η διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι εκφυλισμένη συνεπώς για $x = 1$ ο $\mathbf{A}$ δεν διαγωνοποιείται.

Τελικά, σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Παρατήρηση: Ένας άλλος τρόπος λύσης για τις παραπάνω περιπτώσεις 2) και 3) είναι να βρείτε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.